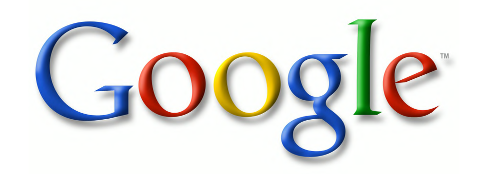
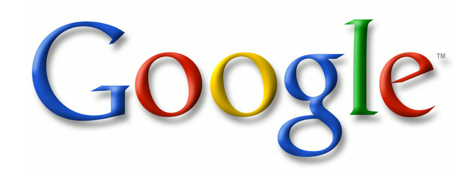
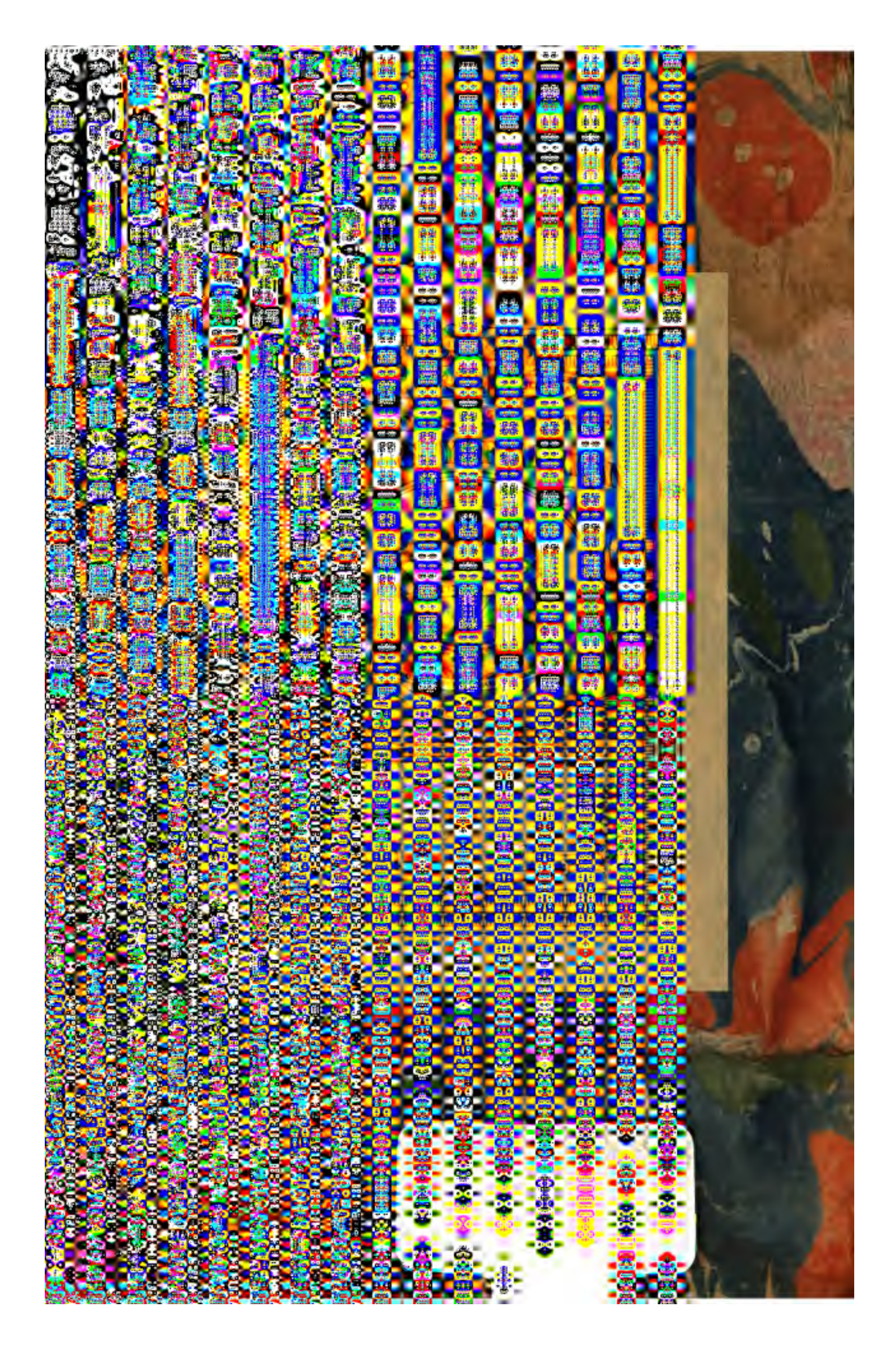








Se hallará en Zaragoza en la Librería de Josef Yagüe, Calle Nueva del Mercadc.

ELEMENTOS

DE ARITMÉTICA,

ALGEBRA Y GEOMETRIA.

SU AUTOR

D. JUAN JUSTO GARCÍA, PRESBÍTERO,
del gremio y Claustro de la Universidad de
Salamanca, y uno de sus Catedráticos,
de Matemáticas, quien los ha corre-
gido y añadido en esta

QUARTA IMPRESION

TOMO PRIMERO.

CON PRIVILEGIO REAL.

SALAMANCA
EN LA IMPRENTA DE D. VICENTE BLANCO,
AÑO 1814.

PRÓLOGO

De la tercera y quarta edicion.

Unos Elementos en los que con el mejor método, concision y claridad se presenten las verdades conocidas de una ciencia; es obra mas dificil de lo que aparece á primera vista. Siendo en ella tan importante el número de las materias que abraza, como la disposicion en que deben colocarse; es preciso que su Autor conozca á fondo el orígen, órden y progreso de nuestras ideas, para ordenarlas de manera que las mas claras preparen al conocimiento de las que lo son ménos, y estas al de las mas dificiles: sin omitir ninguna de aquellas intermedias que los Lectores no puedan suplir con facilidad.

En el feliz desempeño de este obgeto, suele á veces sér un obstáculo el talento y habilidad de un Escritor, que acostumbrado á fuerza de reflexîon y meditacion á ver unidas las ideas mas distantes, supone en sus Lectores igual perspicacia y estension de conocimien-

to, y suprimiendo las ideas medias que aun no han adquirido, les hace ininteligible su esplicacion. De esta clase pudieramos citar egemplos en obras de hombres grandes, á la verdad; pero por la mayor parte inacesibles á una mediana capacidad, que es la que se debe suponer en los principiantes.

Las esplicaciones largas y minuciosas son otro defecto no menos perjudicial y comun en obras, apreciables por otra parte: pero en las que sus Autores han creido aclarar las proposiciones á fuerza de largos discursos y penosos rodeos: sin considerar que en una demostracion para ser percibida, se deben esponer con la posible concision las ideas que median entre las dos principales que hacen el obgeto de la proposicion: y que qualquiera espresion importuna estravía ó debilíta la atencion del Lector, y le hace oscura la esplicacion. Ninguno de estos Autores han enseñado las material de que tratan: y está fuera de duda que es indispensable juntar á la ciencia la esperiencia, para acertar en una empresa tan dificil.

Con efecto, son cosas muy diferentes el saber, y el enseñar debidamente lo que se sabe: y de consiguiente aun supuesta la instruccion y habilidad de un Escritor, nunca estará demas el trabajo que emplee en corregir, añadir ó quitar á unos Elementos para que salgan mas perfectos á la luz pública.

Convencido de esta verdad importante, y hallándome en el caso de publicar la tercera impresion de los mios, corresponderia mal á la indulgente acogida que han tenido en el público las dos primeras, si no hubiese empleado todo mi conato en completarlos, y hacerlos mas útiles, ó menos defectuosos. Á este fin he juzgado conveniente añadirles, entre otras cosas de ménos consideracion, la teoría de las equaciones superiores, la Trigonometría esférica, y una ligera noticia de diferentes curbas con sus equaciones y principales propiedades. Y como estas materias añadidas á un tomo ya bastante abultado, le hubieran hecho demasiado voluminoso; he resuelto publicarlos en dos, y completarlos, poniendo al frente del

primero una noticia histórica sucinta de las Matemáticas puras.

Esta quarta edicion estorbada seis años ha por las fatales circunstancias acaecidas, sale al fin al público en buen papel, buena letra, enmendada de algunas faltas, aumentada de algunas menudencias utiles, y lo mas correcta que ha sido posible en el estado deplorable que la dominacion enemiga dejó la Tipografía en esta desgraciada Ciudad. Me hubiera sido muy facil abultar el volumen y aun el número de tomos de la obra, dando mayor estension á los diferentes artículos que comprende: pero hubiera perdido todo su mérito; que consiste en encerrar en pequeño volumen las verdades fundamentales de las matemáticas puras esplicadas con método, órden y claridad, sin ambages ni superfluidades.

Asi solo puede el filósofo, el médico, el teólogo y el jurista tomar en un año escolástico que destinan á este estudio, las luces necesarias á sus respectivas profesiones; al mismo tiempo que preparan su razon al conocimiento

de la verdad. Y los que se dedican á matemáticas pueden en dos años con una mediana aplicacion ponerse en estado de emprender el estudio de las matemáticas mistas.

Aun los que quieran hacer su única profesion de estas, estudiándolas á fondo y en toda su estension, ahorrarán mucho tiempo y trabajo, comenzando por estos Elementos, y estendiendo despues de sabidos, sus conocimientos recorriendo qualquiera de las apreciables obras que tenemos ya en nuestra lengua: la de D. Benito Bails, la de D. José Vallejo, ó la de D. Tadeo Lope y Aguilar, que con mas doctrina y estension tratan las materias contenidas en esta. La esperiencia de algunos jovenes que bajo mi direccion la han pasado dos veces en un año por su segunda edicion; me autoriza á dar este consejo sin mira alguna de interés ni de jactancia.

No seria fuera de propósito concluir este prólogo recomendando el estudio de las Matemáticas: pero no se ignora ya en España su utilidad y su mérito. Bien se sabe que ellas

son el alma de las Ciencias naturales, que sin ellas desfallece la Agricultura, no hay Navegacion, no hay Artes, no hay máquinas, no hay caminos, no hay puentes, no hay canales; y de consiguiente falta la industria y el comercio, y no se perfeccionan los Oficios mecánicos: en una palabra se sabe que el esplendor, poder y prosperidad de una Nacion pende en gran parte del fomento y cultivo de las ciencias matemáticas.

NOTA. *Un número puesto dentro de un paréntesis denota que la demostracion ó esplicacion de lo que allí se dice, está en el párrafo que tiene aquel número.*

RESUMEN HISTÓRICO DEL ORIGEN, PROGRESOS Y ESTADO ACTUAL DE LAS MATEMÁTICAS PURAS.

ARITMÉTICA.

Dejando á los críticos ociosos adivinar quáles fueron las ciencias ante diluvianas, y de los conocimientos matemáticos de Henoc, y de los hijos de Set, que no tienen el menor apoyo en la historia; y pasando en silencio lo que con mas elocuencia que solidez ha querido persuadirnos el sabio Bailli del saber de un antiquisimo pueblo de la Atlantide; no podemos dudar que la idea de los números, y el mecanismo de sus combinaciones ha debido comenzar con los hombres; para cuyo trato, comercio y primeras necesidades eran indispensables.

No es tan fácil congeturar los progresos, y la perfeccion que con el uso y el tiempo pudo adquirir la Aritmética; siendo cierto que los historiadores no hablan de ella hasta pocos siglos ántes de nuestra Era cristiana. Lo único que sabemos y admiramos

en aquellos remotos tiempos, es que todos los Pueblos, à escepcion de los Chinos y una nacion de Tracia, de que habla Aristóteles, se han convenido en adoptar el sistema de contar de diez en diez que ha llegado hasta nosotros: al que pudo dar origen el número diez de nuestros dedos, á donde es ovio y natural á todos el recurrir para evacuar sus cuentas.

Este ingenioso sistema de numeracion, que hace la base de nuestra aritmética, ha sido familiar á los Arabes mucho tiempo ántes de haber penetrado à nuestro suelo. Pero parece que el honor de su invencion se debe à los Indianos, de quienes dice Alsephadi, autor árabe, que se gloriaban de la invencion del modo de calcular y del juego del aljedrez: lo que confirma Aben-Ragel, autor tambien árabe del siglo XIII.

En esto mismo estriva la opinion de los que atribuyen à los Indianos el origen de la aritmética, contra Platon y Aristágoras que le ponen en Egipto, y contra Estrabon, Porfirio y Proclo que hacen este honor à los Fenicios, los primeros y mayores comerciantes del Universo. Sea de esto lo que se quiera, lo cierto es, que hasta Pytágoras, que nació en el año 589 ántes de Jesucristo, no se halla el menor indicio de que la aritmética se hubiese cultivado. Con efecto,

este filósofo célebre de vuelta de Egipto, á donde habia ido á instruirse, y huyendo de Samos su patria que encontró tiranizada, fundó en Italia la Escuela llamada *Italica*, en que enseñó toda clase de conocimientos sin escluir la aritmética que, entre varias virtudes misteriosas que se dice atribuyó á los números y sus combinaciones, enriqueció con la tabla de multiplicacion llamada *pitagórica*, y muchas otras de sus primeras verdades.

A sus discípulos debió la aritmética muchos progresos; pues en tiempo de Platon y Euclides, tres siglos ántes de la Era cristiana se conocian ya ademas de las primeras reglas, la estraccion de las raices cuadrada y cúbica, y aun las proporciones. Aristoteles en diferentes pasages de sus obras hace frecuentes alusiones y llamadas á las doctrinas aritméticas, que dan á entender que eran bastante conocidas y comunes entre los Griegos sus lectores.

Hasta 113 años ántes de Jesucristo, en que floreció Arquimédes, no se conoce invencion particular en la aritmética: pero este filósofo cultivó y acaso inventó la utilísima teoría de las progresiones, demostrando en su *Psamnite ó de número arenæ*, entre otras cosas, que el término quingentésimo de una progresion décupla de granos

de arena, llenaría el hueco entónces conocido entre las estrellas fijas y la tierra.

A Eratóstenes se debe la primera invencion de la aritmética instrumental, que fué un tablero ó tabla de números impares con la añadidura de divisores comunes y compuestos, para distinguir los números primeros y simples de los compuestos: operacion ingeniosa y aun sublime para aquellos tiempos, que mereció ser anotada en el siglo pasado por Juan Fello, Arzobispo de Oxford, y mas recientemente, por el docto matemático Pell. A todos los referidos se aventajó Nicómaco llamado el *aritmético* por antonomasia, que se hizo célebre por sus comentos, ilustraciones, traducciones y compendios de quanto se sabia entre los Griegos de aritmética: y entre otras investigaciones curiosas sobre los números pares é impares, primeros y segundos, simples y compuestos, inventó los números polígonos, ó suma de una progresion que comienza con 1, y cuyas unidades forman diferentes figuras geométricas.

Aquí correspondia hablar de Diofante, el Leibniz ó Neuton de los antiguos en esta materia; pero como sus profundas investigaciones aritméticas dieron origen al Algebra, reservamos para la historia de esta ciencia el hablar del sobresaliente mérito de este

filósofo, que se puede llamar el último de los Griegos que ha dado luces à la aritmética, si se esceptuan algunos trozos de las Colecciones matemáticas de Pappo en que se refieren las doctrinas aritméticas de los antiguos.

No adelantaron mas los Latinos, que no tuvieron mejor obra aritmética que la de Boecio, que es en parte compendio y en parte traduccion de la de Nicómaco. Despues de éste, ninguno merece nombre de aritmético sino el célebre Beda, que à principios del siglo VIII trató de los números, y resolvió algunas de sus questiones: de manera que pudo dar luz para conjeturar despues de tantos siglos los conocimientos aritméticos de los antiguos. Tambien esplicô la *Datilonomia* ó arte de contar por las situaciones é inflexiônes de los dedos: ilustrado despues por el Nebricense, Wover y otros modernos.

A los árabes, únicos depositarios de los conocimientos matemáticos, mas que à los Latinos, ha debido la aritmética sus mayores progresos. Son infinitos sus escritos en esta materia. Thebit ben Corah que trató de los números poligonos, de los que se multiplican al infinito, y de la proporcion compuesta: Abi Abdalla Moamad llamado el *aritmético*, Aben Barza el *calculador* son los mas célebres: y en sus obras aparece una suma

destreza en el manejo de los números, un conocimiento fino de sus relaciones, diferentes doctrinas acerca de sus propiedades, y nuevos métodos para resolver problemas: entre ellos *la regla de falsa posicion simple y compuesta*, que prueban su profundo saber en aritmética.

Nada merece mas el reconocimiento que les debemos en esta parte, que el habernos comunicado las cifras numerales y el modo de usarlas. Los Hebreos, Egipcios, Griegos y demas naciones asiáticas, como tambien los Latinos representaban los números con las letras de su alfabeto: cuyo uso embarazoso en las operaciones aritméticas, hacia à esta ciencia imperfectísima, y como balbuciente: pero las cifras, signos y figuras numéricas que debemos à los árabes, asi como el método seguro de manejarlas facilita de manera las operaciones mas dificiles, que ha dado un nuevo ser y una nueva vida à esta ciencia. La época incierta en que los árabes adquirieron este método de los Indianos, se puede probablemente colocar à principios del siglo VIII; pues sabemos que Alkindi en el siglo IX escribió ya de la aritmética indiana, y en el siguiente dió Almogetahi un tratado mas difuso *del arte de los números indianos*, y otro Alkarabisi *del modo de contar de los indios*: como tambien que á principios del

XI exâminó el célebre Alhasan los principios del modo de contar de los Indios.

De los árabes tomaron los españoles el uso de aquellas cifras, y Burriel hablando de una traduccion de Tolomeo del año de 1136, dice que es uno de los escritos mas antiguos en que se descubren las notas arábigas: las quales, añade, se usan en casi todas las obras matemáticas de aquella edad, pero no en los libros ó instrumentos, ni aun en las mismas cuentas, en que se continuaba el uso de los números castellanos que eran los romanos con muy poca variacion.

En el siglo X aprendió en España Girberto, despues Papa con el nombre de Silvestre II, la aritmética que comunicó á las Galias, segun dice Malesburi en su historia de Inglaterra lib. 2: y Gerardo Aurelio en sus cartas hace mencion de un libro de multiplicacion y division de los números que escribió el español Josef que él buscaba con ansia. Aun se conserva el libro del Abaco que pubicó en 1102 el célebre Leonardo Fibonacci de Pisa, que cultivó con ardor la aritmética en Africa á donde su padre le habia llevado empleado en una aduana. Este códice puede ser mirado como obra magistral, y abraza tambien la aritmética algébrica.

En el siglo XIII se distinguieron en arit-

mética Jordan Nemorario y Juan de Sacro Bosco, célebre tambien por su tratado de Esfera y á fines del XIV y principios del XV hicieron papel en esta parte varios griegos modernos, especialmente Manuel Moscópulo que inventó la formacion del *Cuádrado mágico*, compuesto de números dispuestos de manera que los de la columna diagonal y vertical hacen una misma suma. Tiene varios usos y propiedades que en diferentes épocas han cultivado y ampliado despues de Meziriac, Stifell, Frenicle, Poignard, la Hire, Sauveur y otros. Al mismo tiempo florecian en Italia diferentes aritméticos entre los que merece ser nombrado Lucas Pacciol de Borgo de San Sepolcro, que escribió la primera obra aritmética que se ha dado á la prensa con el título *Suma de aritmética, geometría, proporciones y proporcionalidad*: en la qual aprovechándose de los escritos anteriores, redujo á mejor método, y abrevió las questiones aritméticas, y dió mas á conocer el álgebra; suministrando luces á los Tartaglias y Cardanos con que adelantaron tanto despues.

El cálculo de las partes decimales, del que se cree autor á Juan Muller ó Regiomontano, natural de Konisberg en Franconia, adelantó los límites de la aritmética y animó el ardor con que la cultivaron Stifels, Pelletier, Maurolico, Vieta y muchos otros. Pero lo

que estendió prodigiosamente su utilidad causando una feliz revolucion en la Geometría, Trigonometría y Astronomía, fué la invencion de los logarítmos que á principios del siglo XVII hizo el Escoces Juan Népero, varon de Merchiston, mudando con ella la multiplicacion en adicion, la division en resta, la estraccion de raices y elevacion á potencias en division y multiplicacion: dando por este medio una suma facilidad á los cálculos mas difíciles y escrabrosos. Brigio su docto discípulo y Profesor de matemáticas en Oxford, mejoró este hallazgo publicado con el título de *Mirifici logaritmorum canonis descriptio*, en su *Aritmética logaritmica* impresa en 1624: en donde se encuentran tablas de los logarítmos de los números naturales desde 1 hasta 20000, y desde 90000 hasta 101900; pero falleció ántes de haber acabado otra tabla de los logarítmos de los senos, de grados y centenas de grado del quadrante, que concluyó Enrique Gelibrando en 1630 en su *Trigonometría británica*. Despues publicaron sus tablas Keplero, Benjamin Ursino, Adriano Ulak, &c. las de Gardiner se tienen por las mas correctas: lo son bastante las de Sherwin impresas en Londres en 8º en 1705: y en 1795 acaba de publicarlas en París muy completas Francisco Callet en dós vol. 8º de marca.

Tambien Neper nos dió en su *Rabdolo-*

gia la discripcion de una máquina que por medio de ciertas rayas y laminitas ingeniosamente combinadas presenta qualquiera multiplacion ó division sin trabajo del calculador; que Roussain ofreció mejorada á la Academia de las Ciencias en 1770. De este género de inventos se debe uno á Pascal, aunque mas dificil, y complicado, de un uso mas universal; otro mas sencillo á Leibniz presentado en 1673 á la Academia de Londres. En 1666 habia ya inventado otra màquina Moreland, y en este siglo l'Epine Boitissendeau y otros se ocuparon en este trabajo, que al cabo se ha abandonado como de poca utilidad.

Pascal inventó despues el *Triángulo aritmético* por el qual con un número que pone en su punta, se forman sucesivamente todos los números figurados, se determinan las razones de los de dos casillas qualesquiera, y las diferentes sumas de los números de una misma fila: al mismo tiempo que trabajaba Fermat en las propiedades de los números figurados, que adelantaron despues Eulero y la Grange: y Frenicle en los cuadrados mágicos, en los triángulos rectángulos numéricos, y abreviacion de las combinaciones, desatando todo género de problemas por medio de su *método de las esclusiones* que se imprimió despues.

El aprecio que los Pitágoricos hacian del

Tetractis ó número quatro, dió motivo á Wigel, Profesor de matemáticas en Ginebra á imaginar una aritmética quaternaria usando solo de los números 1, 2, 3, 0, y contando con períodos de quatro en lugar de nuestros períodos de diez que publicó en dos obras sobre la *Tetractis pitagórica* hácia el año de 1670: en el qual sistema, que parece ser el de los Traces de que habla Aristóteles; cree encontrar mas ventajas que en el déqupulo.

Con este motivo trabajó Leibniz su *Diadica* ó aritmética binaria en que para mayor comodidad en los cálculos usa solo del 1 y cero: asegurando que es mas á propósito que la decimal para hacer progresos: por decontado este pensàmiento que Leibniz comunicó al Padre Bouvet, sirvió á este Misionero para esplicar los antiquísimos caracteres chinos que no habian podido entender los mismos nacionales. Al tiempo que Leibniz ofrecia su invencion en 1702 á la Academia de las Ciencias; pensó Lagni, Profesor de Hidografia en Rochefort, introducir la aritmética binaria para evitar algunos inconvenientes de los logarítmos; pues con ella se reducen tambien á adicion y sustraccion, la division y multiplicacion: y Dagincurt en una memoria sobre este asunto, hace ver que en el sistema binario se encuentran con suma facilidad las leyes de las progresiones. Pero sin embargo de estas ventajas, y de las que cree Leibniz se

seguirían, de contar hasta doce, ó hasta diez y seis; se han tenido por de mayor consideracion los inconvenientes que acarrearian estas novedades, y hasta ahora no ha habido quien vuelva á promover estas ideas.

En esta época se ocupaban los Ingleses en las mas sublimes y útiles teorias. Wallis publicó su *Aritmética de los infinitos* en la que se reducen á suma exâcta las mas largas é intricadas series de números. *La fraccion contínua* de Brounker, cuyos escelentes usos han manifestado despues Eulero y la Grange, las series infinitas que tanto han cultivado despues Mercator y Barrow con muchas otras útiles producciones, todos son frutos de la preciosa obra de Wallis. Despues de la qual apareció la sublime *Aritmética universal* de Newton, que abraza ya en números, ya en cifras algébricas quanto pertenece á cuentas y cálculo, y forma un cuerpo perfecto del arte de calcular.

Finalmente, á fines del siglo XVII se hicieron aplicaciones de la aritmética á diferentes asuntos que estendiéron no poco su dominio. Pascal, Sauveur y Huingens la aplicaron á las combinaciones de los juegos de suerte: Leibniz á la Jurisprudencia y á la Moral: determinando la usura, ó el fruto del dinero que podria cobrarse en ciertas circunstancias. Petri redujo á cálculo el número de habitan-

tes de una nacion, las mercaderías que puede consumir, la labor que puede hacer, la cultura, el comercio, navegacion y quanto puede interesar al Gobierno: formando una aritmética política, que fué como el ensayo del arte de conjeturar, que tomó despues aumento con los progresos del álgebra, de que vamos á hablar: omitiendo los trabajos menudos de ilustres matemáticos, que no se han desdeñado de cultivar la aritmética, cuya enumeracion harian esceder los límites estrechos que nos hemos propuesto en esta ligera historia de la aritmética.

ÁLGEBRA.

El Álgebra, que de método particular de la aritmética, ha llegado á ser ciencia principal que abraza la aritmética y geometría; debió su orígen al griego Diofante que en sus *questiones aritméticas* publicadas en el siglo IV, manejaba ya las equaciones de 1.er grado, y ofrecia la solucion de las de 2.º que debia de poseer. Se han perdido muchas obras de este Filósofo, lo mismo que el Comentario, que del álgebra hizo la tan sabia como desgraciada Hipacia, hija del Filósofo Teon, muerta desastradamente en un tumulto del pueblo de Alejandria que la creia mágica, y cómplice en las desavenencias entre San Ci-

rilo y el Gobernador Orestes. Los árabes cultivaron con ardor el álgebra, cuyo nombre *aljavar ó almucabala* que equivale á *restitucion*, seguramente es árabigo. La primer obra algébrica que se debe á los árabes, la publicó en el principio del siglo VIII Moamah ben Musa, y contiene ya la solucion de las equaciones de 2º grado. A ella se siguieron las de Thebit ben Corah, Omar ben Ibraim de quien cita Montucla un códice con el título de *Algebra de las equaciones cúbicas*, Ahmad Altajeb discípulo del sabio Alkindi, Ebn Albanna de Granada, Kosein, Jahia, Tejoddin, y otras muchas.

Se ignora quienes fueron los primeros que trageron á nuestro pais estos conocimientos: se cree que Leonardo de Pisa los tomó de los árabes, y que la obra citada de Lucas del Borgo publicada en 1494, fué la primera que apareció de álgebra que él llama *arte mayor*, y se conoció tambien con el nombre de *ciencia de la cosa* y aunque en ella no se pasa de las equaciones de 2º grado, la aprovecharon tan bien los Italianos, que Scipion del Ferro Boloñes encontró muy luego la solucion de uno de los casos de las equaciones del 3.er grado, que comunicó á su discípulo Antonio del Fiore. Viéndose este en términos de resolver problemas hasta entónces insolubles, desafió á Nicolas, natural

de Brescia, conocido con el nombre de *Tartaglia* ó tartamudo, de un golpe que recibió en la cabeza. Este aventurero dotado de un talento singular para las matemáticas, aceptó el desafio: y habiendo descubierto una regla general para resolver los problemas propuestos, confundió á Fiore proponiéndole otros que no supo resolver.

Tartaglia cediendo á las instancias de Cardano le comunicó su invencion despues de haberle exîgido el juramento de no revelarla: pero este faltó á su promesa y publicó el secreto en 1545 en su *Arte magna* dandose por autor del invento, y disculpándose con Tartaglia, á quien costó la vida esta infidelidad, con la perfeccion que habia dado á su método. Con efecto, ademas de haberlo demostrado con una facilidad y elegancia que no hubiera podido darle su autor poco culto, le amplió y estendió à todos los casos, dando fórmulas que despues han tomado su nombre, y descubriendo el primero el caso *irreductible*, cuya dificultad aun no se ha superado. Luis Ferrari discípulo de Cardano, encontró la solucion de las equaciones de 4º grado, que publicó é ilustró Rafael Bombelli en 1579: y á quien atribuye Gua la gloria de haber manejado el primero las cantidades radicales, demostrando que el caso irreductible incluye una raiz real que consi-

guió encontrar en algunos casos.

Todas las naciones tuvieron á mediados del siglo XVI ilustres matemáticos que cultivaron y adelantaron á porfia los conocimientos algébricos. Ademas de los Alemanes Rudolphs y Stifels, los Franceses Pelletier y Buteon, el holandes Stevin recomendado y estimado aun posteriormente, florecia en españa el célebre Nuñez, llamado Nonio, cuyos métodos seguidos entónces, se ven citados aun hoy por Bachet, Dechales, y otros escritores. Pero todos debén ceder al ilustre Magistrado Francisco Vieta, nacido en Fontenais en 1540 y muerto en 1603, cuyos trabajos hacen época en la historia del álgebra, y cuyo genio profundo abrió nuevos caminos seguidos despues por matemáticos de primer órden. A él se debe una mas fácil y comoda preparacion de las equaciones, sus diferentes trasformaciones y usos diversos que tienen, el modo de conocer la relacion de los coeficientes y raices de las equaciones comparadas entre sí por medio de los signos, la formacion de las equaciones por sus raices simples positivas, su resolucion numérica por aproxîmacion, la construccion de las de 3.er grado con el auxîlio de dos medías proporcionales, la descomposicion de las equaciones de 4º grado por las de 3º.. pero sobre todo se le debe el feliz pensamiento de

representar con letras las cantidades conocidas y desconocidas, ahorrando el embarazo que causaba la multitud de signos y números de que hasta entónces se habia usado, y haciendo generales las soluciones que ántes eran por lo comun de casos particulares.

Mejoró esta invencion el ingles Harriot sustituyendo letras minúsculas á las mayúsculas de que usó Vieta, y simplificando el modo de espresar con ellas las multiplicaciones. El mismo empleó el primero las raices negativas en las equaciones, ideando tambien el colocar todos sus términos en un miembro y cero en el otro: y halló que las equaciones superiores se componen de las equaciones simples, con otros inventos que le hacen acreedor al reconocimiento público. Por este tiempo se distinguiéron tambien Ougtred, Girard, Anderson y otros, que ilustraron con sus trabajos el álgebra.

La teoría de Diofante sobre las equaciones indeterminadas habia comenzado á fomentarse en el siglo XIV por el griego Planudes; y despues en el XVI Xilandro tradujo en latin los libros que habian quedado de Diofante, cuya doctrina comentaron y añadiéron posteriormente Van Ceulen, Stevin, Bombelli, Vieta y algunos otros. Pero Bachet de Meziriac la puso á mejor luz, y añadió un método general para resolver en

números enteros todas las equaciones de 1.^{er} grado de dos ó mas incognitas : sin que ninguno hubiese adelantado mas hasta Fermat que encontró nuevos métodos que mereciéron despues la atencion de Frenicle, Eulero, la Grange, Beguellin, Billi y otros insignes matemáticos que han empleado sus doctas tareas en ilustrarlos y estenderlos.

En 1629 habia ya salido á la luz pública *La nueva invencion en el álgebra* del holandes Alberto Girard, en la que, ademas de finas observaciones sobre las raices negativas de las equaciones de 3.^{er} grado, se apuntaban en confuso algunos otros descubrimientos que estaba reservado á Descartes el aclararlos y perfeccionarlos. Este genio creador en todo género, nació en 1596, y apénas dió su atencion á las matemáticas, quando se ocupó en desenvolver la espresion de los polinomios, y el cálculo de los signos y esponentes de las potencias : fué el primero tambien que hizo de las raices negativas el uso debido, esplicó su naturaleza, y manifestó sus ventajas, que no habian alcanzado Harriot y Girard ; determinó por medio de los signos el número de raices positivas y negativas de una equacion quando no hay imaginarias, y los límites de las que no pueden encontrarse exâctas. *La analisis cartesiana* ó método de las indeterminadas para las equa-

ciones, de 4.º grado acredita bastante el mérito de este grande hombre; pero *el álgebra cartesiana*, aplicada al analisis de las cantidades finitas supera todos sus inventos, y hace ver quan superior fué á todos los que le precediéron.

El ya citado Thebit ben Chorah, Leonardo de Pisa, Regiomontano y Tartaglia habian hecho ya algunas aplicaciones del cálculo á la geometría; pero dando á las líneas valores numéricos. Vieta aunque se valió de las letras para este obgeto, se puede decir que sus construcciones geométricas no eran mas que un ligero ensayo con que resolvia problemas que sin este auxîlio se desataban con facilidad: mas Cartesio redujo á arte esta aplicacion, formó por sí el método, dió las reglas, y por el pequeño artificio de esta aplicacion á las líneas rectas, se elevó á las dificiles teorías de las líneas curvas, haciendo de la geometría, ántes una ciencia mezquina y casi práctica, una ciencia sublime y utilísima. Una y otra, la geometría y el álgebra mudaron de semblante con esta aplicacion, cuya invencion ha merecido á su autor el glorioso nombre de conquistador de las matemáticas, que desde esta época han recibido prodigiosos adelantamientos en todos sus ramos.

Entre los que añadiéron é ilustraron la invencion de Cartesio, se han distinguido

Beaune, autor del método sobre los límites de las equaciones, que adoptó y mejoró despues Newton: Hudde, á quien se debe la reduccion de las equaciones, y el método de los maxîmos y mínimos: Schooten, Sluse, Craig, Witt, Rabuel y Jacobo Bernoulli: Wallis por su álgebra y mucho mas por su escelente aritmética de los infinitos, Brounker por su fraccion continua, Barrow, y Mercator merecen ser nombrados entre los insignes bienhechores del álgebra en el siglo XVIII: pues la adelantáron en términos que al parecer, nada quedaba que descubrir en materia de cálculo.

En estas circunstancias se presentó el inmortal Newton, principe de todos los matemáticos: sus elegantes reglas de los divisores racionales de las equaciones, de los límites de sus raices, los escelentes métodos de aproxîmarlas quanto se quiera, de aplicar las fracciones al cálculo de los esponentes, y de reducir las cantidades fraccionarias á series infinitas: su famoso teorema del binomio que lleva su nombre, y la aplicacion de estos inventos á la cuadratura y rectificacion de las curvas, y á la solucion de los problemas geométricos mas árduos y difíciles con otros mil hallazgos en todas las partes de las matemáticas y de la física, espuestos en su *Analisis de las equaciones infinitas*, en su *Aritmética uni-*

versal y otros escritos, breves, pero profundos y completos; le darian sin disputa la palma sobre quantos han cultivado estas materias. Y sin embargo, todos ellos como que desaparecen comparados con su luminoso descubrimiento del *cálculo infinitesimal*, de que hablarémos despues, y prueba lo elevado y sublime de su alma sobre la de los otros mortales.

La naturaleza á veces hace ostension de su fecundidad, y en esta edad feliz para las ciencias, al lado de Newton que honraba la Inglaterra, produjo á su digno émulo Leibniz gloria de la Alemania. Casi tan profundo como Newton, era mas universal en sus conocimientos. Filósofo, jurisperíto, teólogo, antiqüario, historiador, filólogo y matemático, no hubo ciencia que no ilustrase con sus meditaciones y trabajos, y en especial el álgebra. Sin hablar de su nuevo género de equaciones *esponenciales*, y de un método general para encontrar las raices de todas las equaciones: sin hablar de su ingenioso método para el caso irreductible, de sus sutiles especulaciones sobre los logarítmos de las cantidades negativas, ni de otros muchos inventos dignos del aprecio de los matemáticos; basta para inmortalizar su nombre la invencion del *cálculo infinitesimal* por diferente camino que Newton, con quien le puso á nivel.

Hasta entónces no se habian considerado sino las relaciones finitas de las curvas; y estos dos grandes ingenios se elevaron á la investigacion de las razones de las infinitésimas ó elementos de que se componen. Newton y Leibniz exâminaron las relaciones entre las variaciones intantaneas ó insensibles incrementos ó decrementos de las líneas variables, por las que se conocen las propiedades de las curvas, y las sugetaron al cálculo algébrico. Leibniz dió á estos incrementos y decrementos el nombre de *diferencias infinitas*, las considera como infinitésimas de las cantidades finitas que se pueden omitir en su cálculo sin peligro de error: admite diferentes órdenes de infinitésimas, despreciando tambien las de órden inferior en concurrencia de las superiores. Y Newton sin la idea de partes infinitas, considera las cantidades matemáticas como engendradas por el movimiento: llama *fluxîones* las velocidades variables con que son producidas, busca sus relaciones, y forma de ellas diferentes órdenes. Este método, el mismo que el de los infinitésimos, se apoya en principios exâctos y no necesita de la ficcion hipotética de las partes infinitésimas. Las diferencias del uno son las fluxîones del otro; y ambos conducen sin peligro de error á un mismo resultado: á la manera, como dice Maclaurin, de dos que

para sacar exâcta una cuenta, el uno omite ciertos artículos como de ninguna importancia, y el otro los deja por no pertenecer á aquella cuenta. El cálculo infinitesimal comprehende el *diferencial* que desciende del finito al infinitésimo, y el *integral* que asciende del infinitésimo al finito; el uno descompone las cantidades, y el otro las restablece: así como el cálculo de las fluxîones abraza el método *directo* que es el diferencial, y el *inverso* que equivale al integral.

El nuevo cálculo escitó diferentes disputas. Los ingleses acusaron á Leibniz de plagio, atribuyendo á su Newton todo el honor de la invencion; pero Leibniz tuvo ardientes defensores que consiguiéron se le hiciese justicia. Con efecto, él le publicó primero en la Actas de Leibsik, le adoptaron desde luego los Bernoullis y despues toda la Europa: de suerte que hoy se tiene por casi averiguado que uno y otro le inventaron sin habérsele comunicado.

Despues se ha disputado vivamente sobre la exâctitud de los principios en que apoya Leibniz su invencion. El célebre algebrista Rolle desechando las cantidades infinitésimas, acusaba su cálculo de que inducia á error por faltarle la exâctitud geométrica; y Niewentiz aunque admitia las infinitésimas, impugnaba las de órden inferior: pero Leibniz, Ber-

noulli y Erman desvaneciéron estos escrúpulos, haciendo ver quán conformes eran los resultados de estas suposiciones á los que daba la mas rigurosa geometría. Á principios del siglo se renováron estas disputas entre la Academia de París y la Real Sociedad de Lóndres: y el mismo Secretario de la Academia, el elegante é ingenioso Fontenelle no contribuyó poco á disiparlas. Despues el sabio Maclaurin ha puesto en claro toda la metafísica del cálculo infinitesimal: sin embargo de que Cousin aun se queja de que se haya introducido en álgebra, y geometría la nueva idea del movimiento con las fluxiones de Newton, y ha procurado, lo mismo que Alembert, evitar este escrúpulo, usando si de las palabras infinito, infinitésimo, pero fijando á ellas la idea de límites de las cantidades.

Los dos ilustres hermanos Juan y Jacobo Bernoulli comenzaron desde luego á hacer un uso frecuente del nuevo cálculo en la resolucion de los problemas mas árduos. Jacobo dió de él dos ensayos en las Actas de Leipsik, y Juan lo enriqueció con su nuevo cálculo *esponencial*, y escribió lecciones del diferencial é integral, de donde las han aprendido su acerrimo defensor y promovedor Varignon, el sabio Marques de l'Hospital y casi todos los demas algebristas célebres. Eulero, los Riccatis, d'Alembert, la Grange y otros han enri-

quecido el método leibniciano con nuevos ramos y preciosos descubrimientos. En nuestros dias uno de los descendientes de los Bernoullis, y despues de él Caluso con mas empeño y estension de conocimientos, han querido introducir el cálculo newtoniano como mas exâcto y filosófico que el leibniciano, haciéndolo mas fácil y breve, y acomodando á él todos los nuevos descubrimientos: pero hasta al presente aun está por decidir de qué parte estan las ventajas.

La teoría de las series á la que en cierto modo debió su orígen el cálculo infinitesimal, tomó nuevos grados de esplendor con los trabajos que sobre ella hicieron todos los analistas del siglo XVIII; y con ellos se adelantó igualmente el cálculo de las probabilidades: en que sobre los inventos de Pascal, Huingens, Leibniz y Petty, se dedicó Montmort á tratar á fondo del analisis de los juegos de banda, tresillo, tritac... y le siguiéron los Bernoullis, Moivre que publicó una obra original y clásica sobre los juegos de suerte, Simpson, Deparcieux, Eulero, Alembert, la Grange, la Place, Condorcet, Fontana, Lorgna &c. todos los quales trabajaron en inventar nuevos métodos y diferentes fórmulas para sugetar al cálculo la fortuna y el azar.

Seria obra muy larga y agena de nuestro

plan, teger el elogio de ilustres matemáticos que en el siglo XVIII trabajaron á porfia en perfeccionar el álgebra. Bástenos insinuar que la Inglaterra se gloría de los Allejo, Tailor, Cotes, Sterling, Campbell, Maclaurin, que publicaron en las Transaciones filosóficas de la Real Sociedad de Lóndres nuevos inventos y finas especulaciones analíticas: del célebre ciego Saunderson y del profundo Simpson, cuyas obras ilustran la Europa, y son al mismo tiempo un testimonio clásico del ardor con que aquella nacion há promovido tan útiles estudios. La Francia cuenta á Varignon, Rolle autor del método de las *Cascadas*, á Lagni, Prestet, Reigneau que hicieron señalados servicios al mundo literario. La Alemania á Goldbach, Mayer, Erman, Cramer y Wolfio: y la Italia á Jacobo Riccati, Fagnani, Gabriel Manfredi y Grandi acreedores todos por sus trabajos analíticos al reconocimiento de la posteridad.

Vemos pues, en la última mitad del siglo XVIII llevada el álgebra á un grado sumo de perfeccion, y hecha el mas apto como el mas útil instrumento para adelantar todas las demas ciencias por Nicolas y Daniel Bernoulli, émulos de su padre Juan y de su tio Jacobo por Nicole, por el insigne Clairaut, por el ilustre Eulero, ingenio tan original como vasto en todas las ciencias exâctas que

ha enriquecido con sus escelentes é inmensas obras, que se pueden considerar como el cuerpo de doctrina mas completo que tenemos en este género: por el célebre Alembert, inventor del cálculo de las diferencias parciales, del método de los coeficientes indeterminados, reduccion de las cantidades imaginarias á espresiones mas sencillas, y cálculo de las funciones racionales é irracionales: por Vicente Riccati, que se puede llamar el verdadero padre del álgebra sublime en Italia por su *Tratado de las séries* y sus *Instituciones analíticas*: por los insignes la Grange, autor del cálculo de las variaciones y de un nuevo método para las séries recurrentes y la Place, dignos émulos de los Euleros y Alemberts: sin que deban omitirse los Condorcets, Cousins, Bossuts que honran la Francia, y los Fontanas, Lorgnas y otros muchos talentos que se distingnen en Italia y Alemania.

GEOMETRÍA.

Aunque se ignora en donde tuvo orígen esta ciencia, es bastante verosimil que fuese en Egipto, en donde se hacian tantos diques, canales, y famosas fábricas que exîgian conocimientos geométricos: y si creemos á Heródoto, su invencion se debe á Lot ó Osiris con el motivo de la division de tierras que el rei

Sesostris le mandó hacer entre sus vasallos. Pero los pocos progresos que baxo su enseñanza hicieron los Griegos, son una prueba decisiva de las escasez de luces de los Egipcios en este particular. Con efecto, el rei Amasis se admira de ver á Tales medir la altura de una pirámide por medio de la sombra de su baston; y su invencion de formar el triángulo rectángulo en el semicírculo, y la propiedad que encontró Pitágoras de la hipotenusa del triángulo rectángulo, les llenó de gozo; y les movió, como dice Laercio, á decretar sacrificios á las Musas. En la Escuela que fundó Tales en la Jonia, se distinguió entre sus discípulos Anaxîmandro; mientras que Pitágoras y los de la suya en Italia, hacian sus delicias en echar los primeros fundamentos de la geometría, sin cuyos conocimientos eran escluidos de ella. Laercio hace á Demócrito autor de varias obras geométricas en que trata del contacto del círculo, de la esfera, de las líneas irracionales, y de otros muchos puntos que prueban los progresos que entonces se hacian en esta materia.

Es casi imposible en tanta obscuridad de noticias seguir la historia de los que hicieron Arquitas, Euclides Póntico, Hipocrátes Chio, Filolao, Platon y tantos otros antiguos matemáticos. A este último se atribuye la invencion del método analítico ó de resolucion: y

se puede decir que atendidas las sublimes especulaciones en que se ocupaban los geómetras de aquellos siglos; se habian descubierto ya en ellos casi todas las proposiciones que hacen hoy los elementos de esta ciencia. Efectivamente, Plutarco nos dice que Anaxágoras trabajaba en la cárcel en la cuadratura del círculo, problema que ha ocupado á los geómetras hasta nuestros dias, y cuyo empeño por encontrarla, ha producido notables adelantamientos: y Aristóteles cita tres diferentes cuadraturas encontradas por Hipócrates Chio, Brison y Antifonte. El primero halló con este motivo la cuadratura de la *lúnula* que tomó su nombre, y Dinostrates inventó para el mismo obgeto la *cuadratriz* que se llama de Dinostrates.

La duplicacion del cubo ocupó muy luego á aquellos geómetras: y el citado Hipócrates fue el primero que conoció que para resolverlo, era menester encontrar dos medias proporcionales entre el lado del cubo y su duplo. Platon formó un instrumento con que lo resolvió mecánicamente. Eudoxîo inventó ciertas curvas para resolverlo: pero hasta Arquitas Tarentino no se desató con exâctitud, si hemos de creer á Laercio y á Platon. Sin embargo á Eudoxîo, y á su discípulo Menecmo se atribuye la invencion de las Secciones cónicas, y en su tiempo se tenian ya las pri-

meras nociones de los *Lugares geómetricos* con cuya invencion se honraron despues Descartes y Sluse. Ello es que por entónces se escribieron los cinco libros de lugares sólidos de Aristeo, donde tomó Euclides alejandrino la doctrina de sus libros de los Cónicos. Tambien se puede ver en Papo los medios ingeniosos que se habian inventado para resolver el problema de la triseccion del ángulo, valiéndose de la hipérbola y de la concoide: lo que prueba que los antiguos tuvieron en estas materias mas conocimientos de lo que comunmente se crée. Y así no es estraño que Teofrasto y despues con mas estension Eudemo escribiesen una historia de la geometría: tan estensos eran ya sus progresos.

Faltaba sin embargo la disposicion metódica de estos descubrimientos: y esto es lo que suplió casi tres siglos ántes de JesuCristo el esclarecido Euclides, quien ademas de sus *Porísmos* que recomienda Pappo; ordenó y encadenó maravillosamente todas las verdades geométricas averiguadas hasta su tiempo inventando tambien otras que forman el libro 5° de los trece de que constan sus Elementos: sin incluir el 14° y 15° que son de Hipsíclo, ni los dos restantes que en 1593 añadió M. Candalle que tratan de los cuerpos regulares. Esta obra que ha sido la piedra angular de la geometría, ha tenido inumerables comenta-

dores, Teon Alejandrino, Proclo, muchos de los árabes, y despues ha sido traducida y comentada en nuestros tiempos por los mas ilustres Geómetras.

Miéntras que, ademas de Euclides, cultivaban la geometría muchos de los discípulos de la Escuela alejandrina, entre ellos Eratóstenes, talento universal que trabajó con utilidad sobre el analisis y la duplicacion del cubo; florecia en Siracúsa Arquimédes, que fué el prodigio de su siglo. El encontró la razon del diámetro á la circunferencia del círculo que ninguno hasta él se habia atrevido á tentar, inscribiendo y circunscribiendo polígonos al círculo: dando las primeras ideas que al cabo han producido la sublime invencion del cálculo infinitesimal: midió la esfera y el cilindro, las conoides y esferoides, quadró la parábola y encontró las propiedades de la Espiral, curva inventada por su amigo Conon de Samos, con otros muchos ingeniosos y útiles inventos, en que resplandece no ménos su profundo talento y sagacidad, que una escrupulosa exâctitud y severidad en sus demostraciones. Este hombre insigne fué muerto por un soldado romano en la toma de Siracúsa por Marcelo 212 años ántes de JesuChristo.

Apolonio, natural de Pérgamo en Panfilia, fué en la Geometría sublime lo que Arquimétes habia sido en la elementar. Sin hablar de diferentes obras suyas de que Pappo

nos ha conservado estractos, la *de los Cónicos* hará inmortal su nombre: pues se puede decir que quanto se ha escrito despues de secciones cónicas, se encuentra en el geómetra griego: y pasma ver ya en su 6º y 7º libro entre otras invenciones y miras profundas, investigaciones sobre los maxîmos y mínimos y sobre las evolutas. Pappo, Hipacia, Eustocio.... comentaron esta obra que ha servido de elementos á la geometría compuesta. Regiomontano nos comunicó sus quatro primeros libros en 1537, y los quatro restantes no pareciéron hasta que en 1661 los publicó con notas el ilustre Borelli. Hallei los dió á luz mas completos en 1710.

Despues de estos dos insignes geómetras floreció Nicomédes, inventor de la concoide, curva de que se valió para duplicar el cubo, y de la que Newton usó despues en varias de sus especulaciones geométricas; floreciéron Gémino, Filon, Eron, Teodosio autor de los Esféricos, obra recomendable en geometría y astronomía; Menelao, que escribió de los triángulos esféricos, Diocles que inventó la cisoide, que perfeccionó Newton, y finalmente Pappo que hácia el siglo IV de nuestra Era recogió y puso á buena luz los descubrimientos de los griegos que le habian precedido: despues del qual podemos decir que se estinguió la casta de los geométras, y

en mucho tiempo no se volvió á hablar de Geometría.

Los Romanos dieron á esta ciencia poquísima atencion, y hasta los árabes casi no se encuentran quienes la cultivasen. Pero estos no solo la conservaron traduciendo y comentando los escritos griegos; sino que la adelantaron considerablemente, aunque no sea sino por su invencion del uso de los senos en lugar de las cuerdas, por el que se consiguió una suma sencillez y comodidad en las operaciones trigonométicas. Los que entre ellos adquirieron mayor fama de geómetras son Hassen, Abu Giafar, Tabit-ben Corah, Alkindi, Moamad, hijo de Musa, Giaber-ben Aphlah, del que hay en el Escorial un libro *de las Esferas*, Abdelaziz, Massudo y otros muchos.

De los árabes aprendiéron la geometría Gerberto, Campano y Abelardo, restauradores de esta ciencia en ocidente; pero fuéron muy lentos sus progresos como lo muestran las obras rústicas y mezquinas de Jordan Nemorario y Juan de Sacrobosco publicadas hácia la mitad del siglo XIII. Y se puede decir que Purbac y su discípulo Regiomontano fuéron en el siglo XV los primeros que la comenzaron á adelantar. El primero trabajó sobre la geometría práctica, é inventó el *cuadrado geométrico* para medir distancias: y el segundo perfeccionó el

uso de los cálculos trigonométricos, introduciendo en ellos las tangentes, y formando tabla de ellas.

Desde entónces comenzáron á estenderse las luces, y adquirió nuevas riquezas la geometría. Se vió en Italia á Tartaglia, á Federico Comandino que tradujó muchas obras de los antiguos, y se ocupó en los centros de gravedad: á Maurolico, versado en la geometría trascendente, que consideró las secciones conicas en el sólido, y halló muchas de sus propiedades, entre ellas las de las tangentes y asíntotas de la hipérbola. En Francia se vió á Pelletier que disputó con el P. Clavio sobre el ángulo del contacto en el círculo: á M. Candalle Arzobispo de Burdeos, y á Vieta, que superior á todos, construyó nuevas tablas de senos por medio de fórmulas analíticas, determinando la razon de los arcos múltiplices; y generalizó mas la aplicacion del álgebra á la geometría, enseñando á construir equaciones hasta de 3.er grado, á las que redujo la duplicacion del cubo y triseccion del ángulo. Se vió en Portugal á Pedro Nuñez que halló un ingeniosísimo modo de subdividir las partes de qualquier instrumento que algunos quieren atribuir á Pedro Vernier, resolvió el problema dificil de hallar el menor crepúsculo, y trabajó sobre la *Loxodromia*, curva que traza

un navio siguiendo el rumbo que corta todos los meridianos bajo un mismo ángulo. Se vió en el Pais Bajo á Mecio, Adriano Romano, Luis Vanceulen, que todos cultiváron la cuadratura del círculo, que encontráron muy próxima: en Alemania á Werner que escribió sobre el analísis antiguo, á Birge inventor de la *plancheta*, á Gemma Frisio de la *pantómetra* instrumentos de geometría práctica: á Clavio, ilustre por sus obras matemáticas, y á muchos otros que se esmeraban á porfia en el cultivo de la geometría.

Esta fermentacion produjo los mejores efectos. Lucas Valerio habia publicado ya su sabio libro *de centro gravitatis solidorum*, en donde ademas de un nuevo modo de cuadrar la parábola, determina el centro de gravedad en los conoides y esferóides: y el holandes Snelio habia aplicado su *Ciclométrico* á averiguar la relacion del diámetro à la circunferencia; quando comenzó á amanecer una nueva aurora á la geometría, que la hizo mudar de semblante. Keplero Catedrático de matemáticas en Rostoc, aunque dedicado á la astronomía, honró la geometría con su *Stereometría doliorum*, prenunciando ya el método de los infinitos. En ella considerando el círculo compuesto de infinitos triángulos, al cono de infinitas pirámides.... consigue resolver muchos problemas de los antiguos con suma

facilidad, y desata otros nuevos; formando diferentes sólidos con la rotacion de las secciones cónicas al rededor de qualquier línea. Al año siguiente de la muerte de Keplero verificada en 1631, publicó el P. la Faille su tratado *de centro gravitatis partium circuli, et elipsis*; que mejoró el P. Guldin compendiándola y formando una teoría mas general sobre el centro de gravedad de las figuras planas, líneas curvas y sólidos, y desatando problemas que Keplero dejó por resolver.

Ya en 1629 habia inventado el milanes Buenaventura Cavalieri una geometría que apareció con el título de *los indivisibles*. Llama así á los elementos ó partes de que considera formados los cuerpos: imaginando al sólido dividido en infinitas superficies, la superficie en infinitas líneas.... proporcionando por este medio la solucion de nuevos problemas hasta entónces ignorada, y facilitando la de otros resueltos ántes por medios mas dificiles y complicados. Valiéronle estos descubrimientos una cátedra en Bolonia sin mas exâmen: en cuyo destino tuvo ocasion de aumentarlos. Galileo, Viviani y muchos otros abrazaron este método que amplió y defendió de sus contrarios Esteban de los Angeles. Pero quien le aprovechó mas fué Torricelli aplicándole á nuevos problemas, encontrando una nueva cuadratura de la parábola, la

medida del sólido hiperbólico, y lo que le hizo mas célebre, la dimension de la cicloide.

Roverbal se quejó de que se le hubiese arrebatado la gloria de esta invencion, que parece poseía ya, y que habia conseguido por un método semejante al de los indivisibes; pero que habia tenido oculto. Sus injustas quejas no disminuyéron en nada el mérito que le grangearon sus trabajos geométricos. Ademas del referido método, el de las tangentes llamado *de los movimientos compuestos*, y el que encontró para determinar los centros de oscilacion mas exâcto que el de Cartesio; inventó ciertas curvas con que cuadró las parábolas, y otros diferentes espacios infinitos.

Pero ni él, ni sus precesores pueden compararse con el ilustre Cartesio y su contemporaneo Fermat. Miéntras que se distinguian en Italia Borelli ilustrador de los antiguos geómetras, y Viviani célebre por sus doctas *Divinaciones sobre los lugares sólidos de Aristeo* y el 5º libro de los Cónicos de Apolonio; descollaba entre todos Cartesio inmortalizando su nombre con la aplicacion del cálculo á la geometría. Los rasgos y propiedades de las curvas espresadas clara y elegantemente en una equacion, nuevos métodos para resolver los problemas planos, adelantamientos notables en la doctrina de los

antiguos sobre los lugares geométricos, formula general para las equaciones de las secciones cónicas en qualquiera posicion que se consideren, invencion de nuevas curvas llamadas *óvalos de Cartesio*, elevacion al grado de geométricas de otras curvas que pasaban por mecánicas, método general para determinar las tangentes aplicable á las questiones mas árduas; todos estos y otros muchos preciosos hállazgos fuéron en manos de Cartesio los frutos de su feliz invencion, que le han merecido el justo título de uno de los mayores geómetras del mundo. Las impugnaciones que de algunos de estos métodos hizo Fermat, le hiciéron bien poco favor; sinembargo de que sus descubrimientos sobre los maxîmos y mínimos, tangentes de las curvas, construccion de los Lugares sólidos, medida de muchas curvas, que redujo ingeniosamente al círculo é hipérbola, con otras invenciones le mereciéron un lugar distinguido al lado de Cartesio.

Los discípulos de este grande hombre hiciéron progresos notables con el nuevo método que tuvo famosos comentadores, que se pueden ver en la *Geometría de Cartesio*, que publicó Schooten en 1695, quien tambien enseñó á tratar las secciones cónicas por un movimiento contínuo. Beaune, Hudde, Wit y señaladamente Rabuel se distinguié-

ron en este particular. Hudde, Sluse, Huinghens hiciéron mas fáciles y espedítos los métodos de las tangentes, y de los maxîmos y mínimos, y Craig inventó nuevas fórmulas para la construccion de los Lugares geométricos, quitándolas el embarazo que tenian las de Cartesio.

El flamenco Gregorio de San Vicente se habia ocupado por espacio de 25 años en la averiguacion de la cuadratura del círculo: y aunque se alucinó creyendo haberla encontrado, hizo con este motivo importantes servicios á la geometría. Halló la conformidad de la espiral con la parábola, que es una espiral desenvuelta, con muchas de sus propiedades; las de la cuadratriz, de que compuso un tomo que se quemó en la toma de Praga por los Saxones: comparó la hipérbola con la parábola, la uña cilíndrica con la esfera, y sobre todo encontró que los espacios de la hipérbola entre las asíntotas crecen aritméticamente, creciendo las abscisas geométricamente; ademas de nuevos métodos para cuadrar la parábola é hipérbola, y medir nuevos cuerpos no medidos hasta entónces, con otros muchos descubrimientos.

El holandes Huinghens impugnó la cuadratura de Gregorio, y se le deben, entre otras cosas, las razones proxîmas del círculo, la dimension de las superficies curvas de los

conoides y esferoides, un método para reducir á cuadratura la rectificacion de las curvas, la medida de la cisóide, la anatomia que hizo, de la logarítmica, varios inventos acerca de las tangentes, areas, sólidos, centros de gravedad, y una teoría sobre las evolutas.

La Inglaterra competia en esta materia con las demas naciones. El profundo Wallis con su aritmética de los infinitos se puso en estado de medir figuras á que no habian llegado otros geómetras, y sugetar á exâctitud geométrica muchos objetos que habian resistido hasta entonces á sus esfuerzos. Resolvió facilmente los problemas sobre la cicloide de que con tanto énfasis proponia en Francia Pascal. Mercator sacó de los mismos principios su *logaritmotecnia* con que cuadraba la hipérbola y sacaba la construccion de los logarítmos: y sus ingeniosas operaciones para la cuadratura del círculo produgeron el método de las *interpolaciones* usadas con frecuencia en la geometría, y diéron origen á la fraccion contínua de Brounker, y á su serie infinita para espresar el area de las hipérbolas: y á ellos se debe el binomio newtoniano, y en alguna manera el principio del hallazgo del cálculo infinitésimal. Barrow esparcia tambien en sus *Lecciones* profundas publicadas en 1666 útiles descubrimientos so-

bre la dimension y propiedades de las curvas, y daba un método sobre las tangentes que abria el camino para llegar al cálculo diferencial; al mismo tiempo que el famoso Gregori descubria teoremas ingeniosos para rectificar curvas, trasformar y cuadrar figuras curvilineas, y demostraba la imposibilidad de cuadrar el círculo, impugnada por Huingens, buscaba su mas inmediata aproximacion y sus propiedades análogas con la hipérbola, espresaba el area del círculo con una serie infinita, y la cuadratura de la parábola de Mercator por un método nuevo.

Parece que la geometría no podia llegar á mas alto grado de perfeccion atendidos los portentosos progresos que en todos sus ramos habian hecho tantos talentos; pero el sublime de Newton halló aun mucho que adelantar á todos sus precesores á quienes superaba en invencion, exâctitud en demostrar y superior destreza en cálcular. Desde luego sacó de la doctrina de Nicomedes sobre la concoide el método de formar las equaciones de 3º y 4º grado, perfeccionó el modo de describir la cicloide, y resolvió un probleme de Apolonio con una elegancia tan superior á la de Cartesio que le acreditó sin disputa, maestro y dueño de la antigua geometría. Antes que Mercator publicase su serie infinita para quadrar la parábola, poseía ya un método que se estendia á cuadrar todas

las curvas tanto mecánicas como geométricas, á su rectificacion, á los centros de gravedad, á los sólidos de revolucion, y á sus superficies.

Pero lo que le abrió los senos mas ocultos de la geometría, y le allanó los mas dificultosos problemas fué su *Cálculo de las fluxiones*. Con él obtuvo el pleno dominio sobre todos los registros de la mas fina geometría que necesitaba para levantar la gran máquina del sistema del universo, que estableció en su inmortal obra de Los *principios matemáticos*. Rectificar curvas, medir areas, determinar tangentes, encontrar los maxîmos y mínimos, fijar los puntos de inflexîon, manejar libremente todas las líneas y figuras de que se sirve la naturaleza, combinar sus diferentes fuerzas segun todas sus direcciones; todo se hizo fácil á Newton con el auxîlio de dicho Cálculo.

Ya digimos que Leibniz habia hecho, aunque por diferente camino, el mismo descubrimiento que Newton; pero no sacó de él todo el fruto de que era capaz: y aunque con su auxîlio resolvió quantos problemas se le propusiéron, ocupado en mil otros obgetos, se complacia en esparcir la semilla dejando á otros el coger los frutos.

Entretanto hacía prodigios el nuevo Cálculo en manos de los Beruoullis, Hospital,

Varignon y muchos otros. Jacobo rectificaba y cuadraba la espiral logarítmica y la loxôdromica, desenvolvia todas las propiedades de la espiral, de las curvas que la producen y que son producidas por ella, establecia su profunda teoría de las curvas que giran al rededor de si mismas con otros mil inventos. Juan se engolfaba en las abstrusas especulaciones de los isoperímetros, del sólido de la mayor resistencia, de las trayectorias, de los centros de oscilacion. Varignon averiguaba las leyes del movimiento compuesto, de las fuerzas centrales qué suponen la geometría mas fina y recóndita: Tschirnausen cultivaba las famosas causticas que corrigió la Hire: Lagni creaba una ciencia nueva en su *Goniometria* de donde deducia una trigonometría mas sencilla y cómoda que la comun, y adelantaba la ciclometría, llevando la cuadratura del círculo á una asombrosa exâctitud. Tailor, Maclaurin y Simpson ilustraban y perfeccionaban la teoría de las curvas con la delicadeza de sus cálculos y operaciones geométricas.

De la Escuela del ilustre Juan Bernoulli saliéron sus tres hijos Nicolas, Daniel y Juan, salió Herman, Maupertuis, Clairaut, Eulero; y aun Alembert confiesa deber toda su ciencia á sus profundas y luminosas producciones: y desde éntonces comenzó la geometría

á subir al alto punto de perfeccion á que en el dia se ve elevada.

El exâmen de las oscilaciones del péndulo, de la figura de la tierra, y la discusion del problema de los tres cuerpos condugeron á Clairaut á determinar nuevas curvas, y á descubrir nuevas verdades geométricas. La Hidrodinámica de Daniel Bernoulli, su ingeniosa demostracion del principio de la composicion de las fuerzas con otras muchas producciones, le hiciéron internar en las mas finas especulaciones geométricas y analíticas, y fraguarse nuevos métodos desconocidos hasta entónces. No se deben menores descubrimientos á Alembert, la Gange,... y sobre todos á Eulero. Todas las ciencias matemáticas han tomado en manos de este grande hombre nuevo aspecto. Se le ve esparcir nuevas luces sobre la rectificacion de las secciones cónicas, cuadratura de las curvas superiores, de las superficies de los conos oblicuos: enriquecer la ingeniosa invencion de Fagnani que determinó los arcos de elipse é hipérbola de una diferencia igual à una cantidad dada: estender y perfeccionar los métodos que Juan Bernoulli, Nicole y Maupertuis habian propuesto para encontrar curvas rectificables bajo de la superficie de la esfera. El cálculo de las diferencias finitas apénas indicado por Tailor y Nicole, y el de las diferencias parciales

que inventó Alembert, deben á Eulero su perfeccion, y la utilísima aplicacion que de ellos se ha hecho despues á los puntos mas sutiles de la geometría. El estendió la teoría de los isoperímetros, inventó el cálculo de los senos y cosenos, la teoría general de las superficies curvas, y la de los radios osculadores. Finalmente, ha perfeccionado los métodos sobre las trayectórias, el sólido de la menor resistencia, y se puede decir que no hay asunto en geometría que no le haya debido alguna perfeccion.

Boscowik, la Grange, Alembert, Condorcet, la Place y otros muchos ilustres matemáticos han contribuido por su parte, y muchos se ocupan hoy en perfeccionar mas tantos ramos inventados ya, cuyo conjunto hace de la geometría una de las ciencias mas vastas y mas útiles ente todas las naturales.

ELEMENTOS

DE ARITMÉTICA, ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA.

1 Todo lo que puede concebirse compuesto de partes que se midan ó se numeren, se llama *Cantidad*; y es objeto de las ciencias que conocemos con el nombre de *Matemáticas*. De ellas llamarémos *Mistas* á las que consideran en la cantidad alguna propiedad sensible: como el movimiento, la luz, objetos de la *Dinámica* y *Optica*: y *Puras* á la *Aritmética*, *Álgebra* y *Geometría*, de que vamos á tratar: las quales calculan y miden la cantidad desnuda de toda propiedad sensible. La Aritmética por egemplo, no atiende á si los números de que trata, representan el peso de los cuerpos, ó sus grados de movimiento: la Geometría mide líneas, cuerpos...; pero prescinde de que sean duros ó blandos, de que sean ó no partes de alguna máquina.

DE LA ARITMÉTICA.

2 Si una cosa qualquiera se considera dividida en partes iguales; por exemplo, si un real se divide en treinta y quatro maravedises; se da el nombre de *unidad* á cada una de estas partes, y de *número* á qualquiera porcion de ellas, como *siete*, *treinta*. Quando el número contiene unidades cabales, se llama *entero*: y *quebrado* quando solo contiene partes de unidad, como *un medio*, *dos quintos*. Á un entero junto con un quebrado llamarémos número *misto*, como *tres y un tercio*. La *Aritmética* es una ciencia que exâmina las propiedades de los números, y un arte que da reglas para ajustar con ellos todo género de cuentas.

3 Entre los diferentes signos ó notas con que varias Naciones han representado los números, se han adoptado unánimemente las siguientes que nos comunicaron los Árabes: (0) *cero*, (1) *uno*, (2) *dos*, (3) *tres*, (4) *quatro*, (5) *cinco*, (6) *seis*, (7) *siete*, (8) *ocho*, (9) *nueve*: los quales representan los primeros números que llamamos tambien *cifras* ó *guarismos*. Para espresar los demas sin aumentar el número de signos que hubieran servido de embarazo; se formó de diez de estos primeros números, que vienen á ser sus *unidades*, una *decena*; y con los mismos signos 1, 2, 3 &c.

puestos al lado izquierdo de las unidades escribieron una decena ó *diez*, dos decenas ó *veinte*, tres ó *treinta*, *quarenta*, *cincuenta*, *sesenta*, *ochenta*, y *noventa*. En 46 por egemplo, el 4 significa quatro decenas ó quarenta, y el 6, seis unidades: y se lee *quarenta y seis*. En 85, el 8 vale ocho decenas, que con las cinco unidades componen *ochenta y cinco*. En 70, que se lee *setenta*, el signo (0) manifiesta que no hay unidades: de manera que este signo *cero* sirve solo para ocupar los sitios vacíos de cantidad.

4 Con diez decenas formaron una *centena* ó un ciento: y espresaron una, dos, tres, quatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve centenas, ó *ciento*, *doscientos*, *trescientos*, *quatrocientos*, *quinientos*, *seiscientos*, *setecientos*, *ochocientos* y *novecientos* con los mismos números, 1, 2, 3 &c. puestos en el tercer lugar. De suerte que en 569, el 5 vale cinco centenas ó quinientos, que con las 6 decenas y 9 unidades compone *quinientos sesenta y nueve*. De diez centenas hicieron un *millar* ó mil, y con dichos signos 1, 2, 3 &c. puestos en el quarto lugar escribieron *uno*, *dos*, *tres*, *quatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho y nueve miles ó millares*: como en el número 7080, donde el 7 vale siete millares, y todo él *siete mil y ochenta*. En el quinto lugar pusieron las decenas de millar, que

son *diez mil* , *veinte mil* , *treinta mil* , &c. hasta *noventa mil* : y en el sesto lugar los cien miles ó centenas de millar , *cien mil*, *doscientos mil* , &c. hasta *novecientos mil* : de suerte que en el número 835007 , el 8 vale ocho centenas de millar ú ochocientos mil, el 3 tres decenas de millar ó treinta mil , el 5 cinco millares ó cinco mil , el primer cero ninguna centena , el segundo ninguna decena , y el 7 siete unidades ; todo lo qual compone ochocientos mil , treinta mil , cinco mil y siete : ó mas breve , *ochocientos treinta y cinco mil y siete.*

5 Con este mismo órden de hácer de cada diez uno , se graduaron los números de los seis sitios siguientes , y se le dieron los mismos nombres que á los seis de que acabamos de hablar, con sola la añadidura de la palabra *cuento* ó *millon* ; es decir , que las cifras del séptimo sitio son unidades de cuento, las del octavo decenas de cuento , las del noveno centenas de cuento , las del décimo millares de cuento , las del undécimo decenas de millar de cuento , las del duodécimo centenas de millar de cuento , por egemplo, 30456320029 son *treinta mil quatrocientos, cincuenta y seis cuentos* , *trescientos veinte mil, veinte y nueve.*

6 Las cifras que se escriben en los seis sitios siguientes , el 13º 14º 15º 16º 17º

18º, tienen el mismo aumento de valor, y los mismos nombres con la diferencia de ser *bicuentos*. Las de los seis siguientes son *tricuentos*, las de los otros seis *quadricuentos*, y así hasta el infinito.

7 Luego para leer un número de muchas cifras convendrá dividirle de seis en seis cifras comenzando por la derecha; y de este modo será facil dar á cada una su propio nombre y valor. Si se diese el número 299838^{3}; 525088^{2}, 555848^{1}, 592312, que son las libras que pesa el globo de la tierra bajo de ciertas suposiciones; despues de dividirlo conforme se ve, se leerá así: *doscientos noventa y nueve mil ochocientos treinta y ocho tricuentos, quinientos veinte y cinco mil ochenta y ocho bicuentos, quinientos cincuenta y cinco mil ochocientos quarenta y ocho cuentos, quinientos noventa y dos mil trescientos y doce.* Con igual facilidad se podrán escribir qualesquiera números que se pidan.

8 Se ve pues, que un número se hace diez veces mayor por cada lugar que se le adelanta ácia la izquierda; es decir, que cada unidad de una cifra qualquiera vale diez unidades de la que se le sigue ácia la derecha: pues una decena vale diez unidades, una centena diez decenas, un millar diez centenas, y así de las demas.

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Adicion.

9 El *sumar* los números enteros, que se reduce á juntar en uno solo todos los que se dan para sumar, es muy facil quando no pasan de 9: pues sin reglas se sabe que 4 y 8 suman 12, 7 y 9 son 16 &c.

Para sumar los números de mas cifras, 1º »se escriben de manera que las unidades de »los unos caigan bajo de las de los otros, las »decenas bajo de las decenas, las centenas, »millares y demas partes bajo de sus corres»pondientes.

2º »Despues se suman todas las unida»des, y se escribe la suma bajo de una raya »que se tira para evitar confusion: se suman »igualmente las decenas, y se pone su suma »junto á la de las unidades; y lo mismo se »practica con las centenas, millares &c. ad»virtiendo que si alguna de dichas sumas con»tiene decenas y unidades, se escriben estas »bajo de la columna que se suma, ó cero si »hubiese solo decenas, y las decenas se jun»tan con las notas de la columna inmediata.« De este modo resultará la suma que se busca, ó un número que contendrá todas las unidades, decenas, centenas &c. de los que se han dado para sumar.

Si se nos preguntase el número de años que han pasado desde la Creacion del mundo hasta nuestros dias; diriamos....

Egemplo I.

Desde la Creacion al Diluvio pasaron.	1656
Desde este á la Vocacion de Abrahan.	427
Desde esta al paso del mar Bermejo.	430
Á la edificacion del Templo de Jerusalen.	581
De este al principio del Imperio de Cyro.	479
Desde Cyro hasta la Era de Seleúcides.	224
Desde esta hasta la Era christiana...	312
Desde Jesuchristo hasta nuestro dias.	1814
Suma.....	5923

Escritos los números con el órden que se ve, sumo las unidades, y para escribirlo en cifra usaré del signo + que quiere decir *mas*, y del = que significa *igual á*: En lugar pues, de decir 6 y 7 suman 13, y 1 son 14, &c. diré mas breve 6 + 7 = 13, + 1 = 14, + 9 = 23, + 4 = 27, + 2 = 29, + 4 = 33: y por quanto 33 contiene tres decenas y tres unidades; pongo 3 bajo de las unidades, y junto las 3 con las decenas así: 3 + 5 = 8, + 2 = 10, + 3 = 13, + 8 = 21, + 7 = 28, + 2 = 30, + 1 = 31, + 1 = 32, que son tres decenas y dos unidades; con que escribiré 2 bajo de la columna que sumo, y llevaré 3 á la siguiente:

$3+6=9, +4=13, +4=17, +5=22, +4=26, +2=28, +3=31, +8=39$: escribo 9 y llevo 3 : $3+1=4, +1=5$: escribo el 5, y tendré que desde el principio del mundo hasta el presente han pasado 5923 años.

10 Los otros egemplos se ponen para egercitarse en esta operacion. Y se ha de advertir que quando en ellos ó en otros se quiera exâminar si ha habido alguna equi-vocacion; se podrán volver á sumar los números comenzando por abajo : pues si sale la misma suma, es suficiente prueba de que está bien sácada.

II.

Se han de sumar.	805104
	34921
	4395210
Suma. . . .	5235235

III.

	908991
	59876
	3004007
	937805
Suma. . . .	4910679

Substraccion.

11 *Restar* un número de otro es averiguar la diferencia que hay entre los dos : restar por exemplo 7 de 9 es encontrar el número

2 en que el 9 excede á 7. Esto se espresa mas brevemente así; 9 — 7 = 2, y se lee *nueve ménos siete es igual á dos*: 10 — 6 = 4 quiere decir *diez ménos seis es igual á quatro*.

12 Los números de una cifra se restan facilísimamente. Para restar los que tienen mas, 1.º »se escribe el menor que se llama »*subtrahendo*, bajo del mayor ó *minuendo*; »con la correspondencia de unidades, dece»nas, centenas &c. 2.º Se resta la cifra infe»rior de las unidades, de la superior, y se »escribe debajo la diferencia. 3.º Quando las »dos cifras son iguales, se escribe cero; y si la »inferior es mayor que la superior; se añaden »á esta 10, tomando para ello una unidad »de la nota anterior, que quedará con una »unidad ménos, y se egecuta despues la resta. »En el caso de ser cero la nota ó notas ante»cedentes, se toma la unidad de la primera »que no lo sea; y entónces en cada cero que»da un 9, como se verá en el egemplo 1.º

4.º »Lo mismo que con las unidades se »egecuta con las decenas, centenas &c. y en »habiendo sacado la diferencia de todas las »partes de los dos números, se tendrá for»zosamente la de dichos números que se »busca.

Un Egército de 438552 Soldados logró de los despojos de una batalla 98004039 doblones; se dió á cada Soldado un doblon, y se pregunta quántos quedaron. Despues de haber escrito los números como muestra el primer egemplo; comenzaré diciendo, restando 2 de 9 quedan 7, ó $9-2=7$, que escribo bajo de la raya: y porque de 3 no se pueden restar 5, tomaré 1 del 6; y juntando con 3, 10 que vale, tendré 13; de donde quitando 5, quedan 8, que pongo debajo junto á 7: $5-5=0$ que escribiré seguido al 8. De 4 tampoco puedo restar 8, con que tomo 10 de una unidad de 8 que vale 1000 de las del 4 (8), y restando de 14, 8 pondré debajo 6 que quedan. Los 990 que con 10 componian la unidad del 8, ocupan el lugar de los dos ceros, y así diré $9-3=6$, $9-4=5$: escribo estas restas, y despues 7 y 9 de donde nada hay que restar, y tendré 97566087,

Egemplo I.

De.	98004639
Se ha de restar.	438552
Diferencia. .	97566087

II.

De	56003120
Restando. . .	1068502
Quedan. . . .	54934618

III.

De.	15300000
Restando. . . .	8500076
Quedan.	6799924

número de doblones que quedan. En los demas egemplos no habrá en que tropezar, bien entendido este.

13 Como el residuo ó diferencia es el esceso que el número mayor lleva al menor, es claro que en añadiéndoselo al menor, ha de resultar el mayor. Si 8 excede á 6 en 2, 2 y 6 han de componer 8 : luego siempre que sumando la diferencia con el subtrahendo resulte el minuendo, estará bien hecha la resta.

Multiplicacion.

14 *Multiplicar* un número 8 por 2 es *duplicar* ó tomar dos veces al 8 : el 16 que resulta, se llama *producto*, el 8 *multiplicando*, el 2 *multiplicador*, el 8 y el 2 *factores* de 16. Multiplicar 8 por 3 es *triplicar* ó tomar tres veces á 8 : multiplicar 7 por 6 es tomar seis veces á 7 : y en general multiplicar un número por otro es tomar al multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador, ó es sumar un número con él mismo cierto número de veces. De consiguiente si el multiplicador es 1, saldrá de producto el mismo multiplicando : y si el multiplicador es cero, sera tambien cero el producto.

15 Pues que el multiplicador sirve solo de indicar las veces que se ha de tomar al multiplicando, deberá ser el producto de la

misma especie que el multiplicando. Y quando el multiplicador sea un número que esprese cierta especie de cosas, como si se hubiese de averiguar el importe de 6 varas á 9 reales cada vara; para multiplicar 9 por 6 habrá que desnudar al 6 del concepto de varas, que le hace *concreto*, considerándole únicamente como si representase 6 unidades, es decir, como un número *abstracto*.

16 Para la práctica de multiplicar se necesita tener bien sabidos los productos de los nueve primeros números; de los quales pondremos aqui los mas dificiles, usando del signo × que significa *multiplicado por*: 4×6=24 quiere decir 4 *multiplicado por* 6 *es igual á* 24 &c.

3×3=9, 3×4=12, 3×5=15, 3×6=18, 3×7=21, 3=8=24, 3×9=27. 4×4=16, 4×5=20, 4×6=24, 4×7=28, 4×8=32, 4×9=36. 5×5=25, 5×6=30, 5×7=35, 5×8=40, 5×9=45. 6×6=36, 6×7=42, 6×8=48, 6×9=54.
7×7=49, 7×8=56, 7×9=63.
8×8=64, 8×9=72.
9×9=81.

17 »Quando el multiplicador tiene una »sola cifra, se multiplican por ella todas las »del multiplicando comenzando por las uni-»dades, y se escribe debaxo cada producto

»si es de una sola cifra, y si es de dos, se »junta la de las decenas con el producto si»guiente.«

Egemplo I.

Multiplicando	90785
Multiplicador	6
Producto	544710

Para saber las arrobas de agua que en 6 dias arroja el caño de un pilar que cada dia echa 90785 arrobas; colocaré 6 baxo de 90785, y diré 6 veces 5 son 30, ó mas breve 6 × 5 = 30, escribo por baxo cero, y guardo las 3 decenas para juntarlas con el producto siguiente: 6×8=48 y las 3 son 51; escribo 1 y llevo 5: 6×7=42, + 5=47, pongo 7 y guardo 4: 6×0=0, en cuyo lugar pondré 4 que llevaba: 6×9=54, pongo 4 y despues 5: y tendré que en 6 dias arroja el caño 544710 arrobas de agua.

18 »Quando el multiplicador tiene mas »notas, se practica con cada una lo que con »la primera, cuidando de empezar á escri»bir cada producto bajo de la cifra que »multiplica, y de sumar despues todos los »productos que resulten.«

II.

Multiplicando	80340091
Multiplicador	705
Producto por 5.	401700455
Producto por 0.	00000000
Producto por 7.	562380637
Producto total.	56639764155

Si se pidiese el valor de 80340091 arrobas á razon de 705 mrs. cada una; escritos los dos números como se ve, multiplicaré como en el egemplo anterior todas las cifras 8, 0, 3, 4, 0, 0, 9, 1 por la primera 5; multiplicaré despues las mismas cifras por cero escribiendo el primer producto; 1 × 0 = 0 bajo del cero que multiplica, esto es, en el segundo sitio: pasaré luego á multiplicar las dichas cifras por 7 poniendo el primer producto 1 × 7 = 7 en el tercer lugar; y sumando despues los tres productos, resultará el total 56639764155 maravedises que importan 80340091 arrobas.

III.

3790
1440
---0
15160
15160
3790
5457600

El número de minutos que componen 10 años, 4 meses y 20 dias, se averigua reduciendo 1.º 10 años á 3650 dias, producto de 10 multiplicado por 365, dias que tiene el año; y 4 meses á 120 dias

producto de 4×30, dias de un mes: 2º sumando 3650, 120, y 20 dias, y multiplicando por último la suma 3790 por 24 × 60 = 1440 número de minutos que tiene un dia: de que resultan 5457600, minutos que se piden.

IV.

57498
30009
517482
172494...
1725457482

19 En el 4º egemplo se omite la multiplicacion por los tres ceros, cuidando solo de escribir el producto por 3 bajo del 3. Quando los ceros, están al fin de los números como en el 5º egemplo; se multiplican las demas cifras 85 por 35, y al producto 2975 se añade el número de ceros que hay, que al presente son seis.

V.

85000
35000
425
255
2975000000

20. Para multiplicar un número qualquiera 78 por 10, se le añade un cero así, 780: para multiplicarle por 100, se le añaden dos ceros, y producen 7800: su producto por 1000 es 78000, poniéndole tres ceros &c.

21 Para ver si está bien hecha la multiplicacion se repite la operacion tomando al multiplicador por multiplicando y á este por multiplicador; pues el producto debe ser el

mismo. En efecto, lo mismo es tomar á 3790 (Eg. 3º) 1440 veces que á 1440, 3790 veces; porque en ambos casos se toman las cifras del un número tantas veces como unidades hay en cada una de las cifras del otro: y en esto estriba tambien la *demostracion* de esta operacion, ó la razon porque se debe executar como hemos enseñado.

Division.

22 Para averiguar las veces que un número qualquiera 2 se puede restar de otro 8, ó las veces que se contiene en 8, habria que hacer quatro restas, y muchas mas si los números fueran mayores. Para conseguir esto con mas facilidad se inventó la *Division*, operacion por la que se averigua las veces que un número que se llama *divisor*, se contiene en otro que es el *dividendo*. Lo que resulta se llama *cociente*, número abstracto en el qual solo se consideran tantas unidades como veces el divisor cabe en el dividendo: de suerte, que si se multiplica el divisor por el cociente, el producto debe ser el dividendo: es decir, si 4 cabe en 8, 2 veces; 2 veces el 4 ha de componer 8. De consiguiente qualquiera cantidad 7 dividida por sí, dará 1 de cociente, y dividida por 1 dará el mismo 7.

23 »Para practicar la division, escrito »el divisor al lado del dividendo 1º, se to»man de la izquierda de este las cifras que

„basten á contener al divisor, y averiguando „qué número de veces le contienen, se escri„be aparte por cociente.

2º „Se multiplica este cociente por el di„visor, y restando el producto de las cifras „separadas, se juntará á la resta la nota que „se les sigue, para tener un nuevo dividendo.

3º „Vuelvase á ver las veces que con„tiene al divisor, y escribase en el cociente „junto á la otra la nota que salga; la qual „se multiplica por el divisor y su producto „se resta del dividendo.

4º „A lo que sobra se añade la nota si„guiente, y despues todas las demas, prac„ticando lo que llevamos dicho siempre que „se baje alguna: á no ser que el divisor no „quepa en el dividendo, en cuyo caso nada „mas se hace que poner cero en el cociente.“

Egemplo I.

Dividendo 24,528	7 *Divisor.*
21	3504 *Cociente.*
35	
35	
0028	
28	
0	

Para averiguar el número de varas que han importado 24528 pesos á razon de 7 pesos la

vara, ó las veces que 7 cabe en 24528; escribo á su lado el 7, y como no cabe en la primera cifra 2, diré 7 en 24 cabe 3 veces, y escribo 3 en el cociente; multiplico despues 3 por el divisor 7, y restando el producto 21 de 24, me quedan 3. Junto á 3 el 5 que sigue á 24, y digo 7 en 35 cabe 5 veces justas, que escribiré junto á 3 en el cociente. Bajo la cifra siguiente 2, y como no contiene á 7, pongo cero en el cociente, y bajo el 8: 28 contiene á 7, 4 veces justas que escribo junto al cero: y tendre que 7 cabe en 24528, 3504 veces, número de varas que se busca. Y como digimos (22) que el divisor multiplicado por el cociente, debe dar el dividendo; será la prueba de estar bien hecha esta division, que $3504 \times 7 = 24528$.

II.

```
206,72 | 34
204    |----
------   608
  272
  272
------
    0
------
```

Si se pidiese el número de reales que componen 20672 maravedises, ó las veces que 34 mrs. que hacen un real, caben en 20672; por no caber 34 en 2 ni en 20, diré 34 en 206 cabe 6 veces, que escribo en el cociente, multiplico 34 por 6, y restando su producto 204 de 206, quedan 2, al que juntaré la nota siguiente 7: y como 34 no cabe en 27, pongo cero en el cociente: bajo el 2, y divi-

diendo 272 entre 34, encontraré 8 sin resta: de consiguiente 20672 mrs. equivalen á 608 reales. Efectivamente, 608 × 34 = 20672.

24 Quando el divisor tiene muchas cifras, es dificil conocer las veces que cabe en el dividendo: para facilitarlo se exâmina las veces que la 1.ª cifra del uno cabe en la 1.ª del otro, y si se contiene las mismas veces que la 2.ª en la 2.ª, la 3.ª en la 3.ª &c. se pone por cociente: advirtiendo que si el dividendo tiene una nota mas que el divisor, se toman las dos primeras por primera, y lo que sobra entra con la segunda, la sobra de esta con la tercera &c.

Si sucede que el producto del cociente por el divisor es mayor que el dividendo, es señal que no le cabe á tanto, y el cociente se debe disminuir: y al contrario, si resulta de resta cantidad igual ó mayor que el divisor, le tocará á mas y se debe ~~disminuir~~ aumentar. Si partiendo en el eg. anterior 206 por 34, le hubiera puesto á 7, habria conocido en el producto de 34 por 7 que es 238 mayor que 206, que 34 no cabe 7 veces en 206, sino 6: si le hubiera puesto á 5; como 5×34=170, restados de 206 dan de residuo 36 cantidad mayor que 34; veria que cabia otra vez mas.

Habiendo de repartir 9639475 rs. entre 2789 personas; en lugar de averiguar las veces que 2789 caben en 9639, veré quántas veces la 1.ª cifra 2 cabe en la 1.ª 9: y aunque son 4 y sobra, como la 2.ª 7 no cabe 4 veces en la 2.ª 6, que con el sobrante 1 compone 16, pondré solo 3 en el cociente. Multiplico y resto y me resultan con el 4 que bajo, 12724 Exâmino ahora quántas veces 2 cabe en 12, que se toma por 1.ª cifra por haber una mas que en el divisor; y aunque cabe 6 veces, no se le puede poner mas que 4, porque la 2.ª cifra 7 solo cabe una vez en la .a del dividendo. Hecha la multiplicacion y la resta añado al residuo 1568 el 7, y parto 15 entre 2, y como la 2.a cifra 7 no cabe ni aun 6 veces en la otra 2.a escribo 5 de cociente, multiplico y resto y pongo al residuo la última cifra 5: y porque el 7 no cabe ni 7 veces en la 2.a del dividendo, pongole 6, y tendré de último residuo 691.

III.

```
9639,475  |2789
8367      --------
          3456 691/2789
12724
11156
-----
 15687
 13945
 -----
  17425
  16734
  -----
    691
```

25 Esta y qualquiera otra resta de la di-

vision que no es cabal, se escribe al lado del cociente sobre una raya con el divisor por bajo así, $3456\frac{691}{2789}$: lo qual significa que el 691 está partido por 2789: porque una raya puesta entre dos números indica que el de arriba esta dividido por el de abajo: $\frac{60}{20}$ quiere decir 60 *partido por* 20; $\frac{365}{15}$ es lo mismo que 365 *partido por* 15 &c.

26 Nótese que nunca puede pasar de 9 la nota del cociente; pues sean unidades, decenas, centenas &c. nunca puede haber mas que 9 en cada lugar. En efecto, si á la mayor resta que es uno menos que el divisor, se le junta 9 que es la mayor cifra que puede bajarse, falta 1 todavia para que el divisor quepa 10 veces en el dividendo que resulta: 19 entre 2 por exemplo, 199 entre 20, 239 entre 24 &c. nunca les cabe á 10.

27 Para sacar la *mitad* de un número, se le divide por 2, para sacar el *tercio* por 3; para sacar el *quarto* se parte por 4 &c. El tercio de 15 es $\frac{15}{3}=5$: el séptimo de 42 es $\frac{42}{7}=6$: el octavo de 96 es $\frac{96}{8}=12$ &c.

28 Supuesto que un número qualquiera 8 partido por 1 dá de cociente el mismo 8, 6 partido por 1, da 6 &c; es claro, que quando el divisor de un número es 10, será el cociente el dicho número, quitándole su última cifra, que será la resta de la division; pues á causa del cero no alcanza á par-

tirse por el 1. El cociente de 16578 partido por 10, será $1657\frac{8}{10}$. Quando el divisor es 100, son dos las cifras que hay que separar, las que no toca partirse por 1 á causa de los dos ceros: y será el cociente de dicho número partido por 100, $165\frac{78}{100}$. Si se hubiese de partir por 1000, saldria $16\frac{578}{1000}$ de cociente, separando tres cifras por los tres ceros. Generalmente la division de un número partido por 10, 100, 1000 &c. se hace separando de la derecha del dividendo tantas cifras como ceros hai en el divisor poniendolas sobre una raia con el divisor debajo, y con las que quedan á la izquierda componen el cociente.

De consiguiente quando al fin de un divisor hubiese ceros, se separarán de la derecha del dividendo otras tantas cifras, que se añadirán á lo que quede despues de practicar la division. En 675469 que se ha de dividir por 5400, separo 69 y dividiendo 6754 entre 54, tendré 125 de cociente con 4 de sobra: es decir, que les toca á $125\frac{469}{5400}$.

29 »Si un dividendo y divisor qualesquie- »ra se multiplican ambos por un mismo nú- »mero, darán sus productos el mismo cocien- »te que ántes de haberse multiplicado;« pues repitiéndose ámbos un mismo número de veces, no debe alterarse el cociente. Por eso 20 partido por 4, y 20×6 partido por 4×6 dan un mismo cociente 5. Igualmente »si el divi-

»dendo y divisor se parten ámbos por un mismo »número, deben dar el mismo cociente que »ántes de haberse partido; « pues ámbos se disminuyen el mismo número de veces: y así de 20 partido por 4 resulta el mismo cociente 5 que de $\frac{20}{2}$ dividido por $\frac{4}{2}$.

30 De lo dicho se infiere que si al fin de dividendo y divisor hubiese algunos ceros, se puede abreviar la division quitando de ambas partes igual número de ellos. Si se tuviese que dividir 6400 por 400 se dividirá 64 por 4, y el cociente 16 será el de 6400 por 400; pues haberles quitado los dos ceros es haberlos partido ambos por 100. (28).

31 La demostracion del método de dividir consta de las mismas reglas; pues por ellas se averigua las veces que el divisor cabe en cada una de las partes del dividendo. La prueba se hace como digimos ya (22), cuidando de añadir al producto del divisor por el cociente qualquier sobrante que resulte quando la division no es cabal. Si en los números del 3.r egemplo se multiplica el divisor 2789 por el cociente 3456, y al producto 9638784 se añade 691 que sobró, saldrá el dividendo 9639475.

Divisores de los números.

32 Llamamos aquí *divisor* de un núme-

ro el que le divide sin resta: como 4 que divide á 12, y 5 á 15. Para encontrar todos los divisores de un número, 2310 por egemplo, se le divide por 2, y el cociente 1155 que ya no puede volverse á partir justamente por 2, se divide por 3: el resultado 385 partolo por 5, y dividiendo el cociente 77 por 7, tendré 11 que le partiré por el mismo 11 para sacar el último cociente 1.

Multiplico ahora de dos en dos, de tres en tres, de quatro en quatro y de cinco en cinco los divisores simples 2, 3, 5, 7, 11 que me han servido, así: $2\times3=6$, $2\times5=10$, $2\times7=14$, $2\times11=22$, $3\times5=15$, $3\times7=21$, $3\times11=33$, $5\times7=35$, $5\times11=55$, $7\times11=77$: $2\times3\times5=30$, $2\times3\times7=42$, $2\times3\times11=66$, $2\times5\times7=70$, $2\times5\times11=110$, $2\times7\times11=154$, $3\times5\times7=105$, $3\times5\times11=165$, $3\times7\times11=231$, $5\times7\times11=385$: $2\times3\times5\times7=210$, $2\times3\times5\times11=330$, $2\times3\times7\times11=462$, $2\times5\times7\times11=770$; $3\times5\times7\times11=1155$ y $2\times3\times5\times7\times11=2310$. Junto ahora los divisores que han resultado con 1 y con los que habia, y tendré todos los del número, que son 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 21, 22, 30, 33, 35, 42, 55, 66, 70, 77, 105, 110, 154, 165, 210, 231, 330, 385, 462, 770, 1155, 2310.

33 Para encontrar *la comun medida*, ó el mayor *divisor comun* de dos números, esto es, el mayor número que los divida sin resta; »se

»divide el mayor por el menor, y si sobra »algo se divide el menor por el sobrante; si »vuelve á sobrar, se parte el primer residuo »por el segundo, y si aun sobra, se continúa »dividiendo siempre por el último residuo el »anterior sin atender al cociente: y si se lle»ga á una division cabal, el número que en »ella haya sido divisor, será el que se bus»ca; pero si sobra 1 en la última division, »no tienen divisor comun los dos números y »se llaman *números primeros*.

Si se pidiese el divisor comun de 341 y 502; partiré este por 341, y despues 341 por 161 que sobran, sin hacer caso del cociente: el residuo es 19 que ha deser divisor de 161, y porque aun restan 9, parto 19 por 9, y como me sobra 1; concluyo que 341, y 502 no tienen divisor comun. Si se pidiese el de 438 y 102, dividiré el 1º por el 2º y este despues por 30 que sobran, partiré 30 primer residuo por el 2º 12, y últimamente el 12 por la resta 6; y como la division es cabal, será 6 divisor comun de 438 y 102.

Ultimamente el divisor de 1729 y 1235 se encontrará dividiendo uno por otro, y despues 1235 por la resta 494; de esta division sobran 247 que ha de ser divisor de 494, y saliendo cabal la particion, será 247 comun divisor de 1729 y 1235. Efectivamente, por dividir 247 á 494, divide tambien á 494×2

+247=1235 número menor, y de consiguiente al mayor 1729 que se compone de 1235+494; luego es el divisor comun: por otra parte es el mayor, porque si hubiera otro mayor que 247, que los dividiese, dividiria tambien á 247 menor que él, lo qual no puede ser.

34 Quando hay que buscar el divisor comun de tres números, se busca el de dos, y despues el de este y del tercer número. Se halla por egemplo, el divisor de 140, 70 y 56, buscando primero el de 140 y 56 que es 28, y despues el de 28 y 70 que es 14, el qual lo será de 140, 70 y 56. Lo mismo se practíca quando los números son quatro, cinco ó mas.

35 A veces se conocen sin trabajo los divisores de un número. Por egemplo, será divisible por 2 siempre que su último guarismo es par. Quando su nota última es 5, es divisible por 5; y por 5 y 10 quando se acaba en cero. Ultimamente, si sumando como unidades simples las cifras de un número, resulta cantidad divisible por 3 ó por 9, dicho número es divisible por 3 ó por 9. Así sucede en 21 cuyas cifras 2+1 suman 3, y por tanto es divisible por 3: 8021 1 lo es tambien, porque sus cifras 8, 2, 1, 1, suman 12 que es partible por 3. Finalmente, 60345 se puede dividir cabalmente por 3 ó por 9,

porque 6 + 3 + 4 + 5 suman 18, cantidad divisible por 3 y por 9.

DE LOS QUEBRADOS.

Como un real se compone de 34 maravedises, un pie de 12 pulgadas, una arroba de 25 libras; los maravedises, pulgadas y libras serán partes ó *quebrados* del real, del pie y de la arroba. Pero como la unidad puede dividirse en infinidad de partes que no tienen nombre particular, ni uso en la vida civil; ha sido preciso inventar un método general para representar todo género de partes ó quebrados.

36 Llamarémos pues *quebrados á los números que espresan una ó muchas de las partes en que se puede concebir dividida la unidad.* Si se divide en dos partes, se llaman *medios*; si se divide en tres partes, se llaman *tercios*; si en quatro, *quartos*; si en cinco, *quintos*; si en seis, *sestos*: *y séptimos*, *octavos*, *novenos*, *décimos*, si se divide en siete, ocho, nueve, diez partes. De 10 en adelante, se llaman *onzavos* si la unidad se divide en once partes, *dozavos*, si se divide en doce; *trezavos*, si se divide en trece.... *veintavos*, *veintiquatravos*, *cienavos*, *milavos*, *millonavos*, si se divide en 20, 24, 100, 1000, 1,000000 de partes.

Si la unidad se divide en tres partes y

quiero espresar dos, se escriben así $\frac{2}{3}$; y se lee *dos tercios*, ó dos partes de la unidad hecha tres partes: si dividida la unidad en siete partes, se quieren representar tres de ellas se escribe $\frac{3}{7}$ que son *tres séptimos*, ó tres partes de la unidad hecha siete. Por la misma razon $\frac{5}{8}$ son *cinco octavos* ó cinco partes de la unidad dividida en ocho partes: y $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{26}{100}$, $\frac{74}{4032}$, &c. se leen *un medio*, *siete décimos*, *veinte y seis cienavos*, *setenta y quatro, 4 mil treinta y dosavos*.

37 Se ve pues, que un quebrado se escribe con dos números entre una raya: el de encima, se llama *numerador* é indica el número de partes que contiene el quebrado: y el de debajo de la raya se llama *denominador*, y espresa el número de partes en que se divide la unidad. De consigüiente el denominador da nombre al quebrado, y espresa la especie y tamaño de sus partes; pues serán tanto mayores ó menores quanto en ménos ó mas partes se divida la unidad. Al numerador y denominador llamarémos *términos del quebrado*.

38 Tambien se puede poner á qualquier número entero 8 en forma de quebrado, poniéndole 1 por denominador así $\frac{8}{1}$. Pero si se quiere reducir el 8 á determinada especie de quebrado, por eg. á *quintos*; como cada unidad tiene cinco quintos, se multi-

plicará 8 por 5, y se tendrá $\frac{40}{5}$ á que equivale 8: para reducir 11 á *séptimos*, multiplicaré 11 por 7, y saldrá $\frac{77}{7} = 11$. En general para reducir un número entero á determinada especie de quebrado, *se multiplicará el entero por el denominador de la especie, y se pondrá bajo del producto el denominador.* Si acompaña al entero algun quebrado, como si se ha de reducir 10 $\frac{5}{8}$ á un solo quebrado, se reduce primero el entero 10 á $\frac{80}{8}$, y añadiendo despues los $\frac{5}{8}$, tendré $\frac{85}{8} = 10\frac{5}{8}$: 28 $\frac{6}{11}$ es lo mismo que $\frac{314}{11}$, multiplicando 28 por 11, y añadiendo al producto $\frac{6}{11}$.

39 Los quebrados $\frac{77}{7}$, $\frac{85}{8}$, $\frac{314}{11}$... que son mayores que 1, y lo mismo $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{20}{20}$... que cada uno de ellos vale 1 (36), se llaman *quebrados impropios* á diferencia de los propios como $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$, cuyo numerador es menor que el denominador. De los quebrados impropios se sacan las unidades que contienen por la operacion contraria á la que los formó (38), *dividiendo su numerador por el denominador* y así partiendo 77 por 7, resultan 11 á que equivale $\frac{77}{7}$; $\frac{85}{8}$ es lo mismo que 10 $\frac{5}{8}$, dividiendo 85 por 8; y $\frac{314}{11}$ lo mismo que 28 $\frac{6}{11}$.

40 Considerémos aora á un quebrado como el cociente del numerador dividido por el denominador (25): y como un cociente

no se altera por multiplicar dividendo y divisor por un mismo número (29); tampoco *se mudará el valor de un quebrado aunque se multipliquen ó partan sus dos términos por un mismo número.* Si se multiplican 2 y 5 de $\frac{2}{5}$ por 10, el producto $\frac{20}{50}$ valdrá lo mismo que $\frac{2}{5}$: y si se dividen 20 y 50 de $\frac{20}{50}$ por 5, el cociente $\frac{4}{10}$ equivale á $\frac{20}{50}$, y á $\frac{2}{5}$. Por esta regla se tendrá multiplicando sucesivamente por 2, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{8}{16}=\frac{16}{32}$ &c. pues lo mismo es una parte de real por eg. dividido en dos partes, que dos partes del real hecho quatro, que quatro partes de real dividido en ocho partes. Multiplicando por 3, será $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=\frac{18}{27}=\frac{54}{81}$ &c. multiplicando por 4, $\frac{6}{7}=\frac{20}{28}=\frac{80}{112}=\frac{320}{448}$ &c. Por lo que se ve que hay quebrados de números grandes que equivalen á otros de números pequeños mas fáciles de manejar, y á los que conviene reducirlos para hacer los cálculos mas sencillos.

41 De consiguiente si dado un quebrado, se pide otro de igual valor y mas sencillo; se buscará el divisor comun de su numerador y denominador (33), y dividiéndolos ambos por él, será el cociente el quebrado reducido Hayase de reducir á expresion mas sencilla el quebrado $\frac{1235}{1729}$: busco primero el divisor comun de 1729 y 1235 que es 247 (33), y dividendo por él ambos términos tendré de cociente $\frac{5}{7}=\frac{1235}{1729}$.

42 Pero sin acudir á esta operacion pesada de buscar el divisor comun, se pueden reducir muchos quebrados, dividiendo sus dos términos por 2, todas las veces que se pueda hacer sin resta: quando ya no se puede, se dividen por 3, por 5, por 7, por 9 &c. Para reducir por este método á menores términos el quebrado $\frac{648}{1080}$; dividiré por 2 su numerador y denominador, y tendré $\frac{324}{540}$: repitiré aun dos veces la division por 2, y me resultará $\frac{81}{135}$, cuyos dos términos partiré por 9 por no poderse ya por el 2: el cociente es $\frac{9}{15}$, que me da por último $\frac{3}{5}$, dividiendo por 3, el 9 y el 15.

43 De dos quebrados de un mismo denominador ó de partes de una misma especie como $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$ es mayor $\frac{5}{8}$ que tiene mas partes ó mayor numerador. Al contrario, de dos quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{3}$ de igual numerador ó de igual número de partes es mayor $\frac{2}{3}$ que tiene menor denominador, ó cuyas partes son mayores. En siendo los numeradores y denominadores diferentes hay que reducirlos á un mismo denominador para conocer qual es mayor.

44 Quando dos quebrados de diferentes denominadores se quieren reducir á otros de igual valor y de un mismo denominador; *se multiplican numerador y denominador de cada quebrado por el denominador del otro.* Para reducir $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{9}$ á un mismo denominador, multiplicaré 3 y 4 de $\frac{3}{4}$ por 9 así $\frac{3 \times 9}{4 \times 9} = \frac{27}{36}$; y

despues 2 y 9 de $\frac{2}{9}$ por 4, $\frac{2\times4}{9\times4}=\frac{8}{36}$, y resultan los nuevos quebrados $\frac{27}{36}$, $\frac{8}{36}$ iguales á $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{9}$ (40), y de un mismo denominador ó de una misma especie de partes.

Quando los quebrados que se han de reducir son tres ó mas, *se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los otros quebrados.* En los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$; se multiplican 1 y 2 de $\frac{1}{2}$ por el producto $5\times7=35$ de los denominadores de $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$; esto es, $\frac{1\times35}{2\times35}=\frac{35}{70}$: despues se multiplican, 3 y 5 de $\frac{3}{5}$ por el producto $2\times7=14$ de los denominadores de $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$ así, $\frac{3\times14}{5\times14}=\frac{42}{70}$: y por último el 4 y 7 de $\frac{4}{7}$ se multiplican por $2\times5=10$ producto de los denominadores de $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$ de que resulta $\frac{4\times10}{7\times10}=\frac{40}{70}$ y quedan los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ reducidos á sus iguales $\frac{35}{70}$, $\frac{42}{70}$, $\frac{40}{70}$ de un mismo denominador.

Sumar, restar, multiplicar y partir Quebrados.

45 Para sumar los quebrados *se hacen de una misma especie ó de un mismo denominador si le tienen diverso, se suman los numeradores, y se pone á la suma el denomi-*

nador comun. La suma de $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{5}$ es, sumando 3 y 2, $\frac{5}{5} = 1$: la de $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{7}$ que reducidos á un mismo denominador son $\frac{14}{21}$ y $\frac{9}{21}$, es $\frac{23}{21}$: la de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$ esto es de $\frac{40}{80}$, $\frac{60}{80}$, $\frac{56}{80}$, es $\frac{156}{80} = 1\ \frac{76}{80}$ (39): últimamente $13\ \frac{1}{6}$ y $2\ \frac{5}{8}$, ó $13\ \frac{8}{48}$ y $2\ \frac{30}{48}$ suman $15\ \frac{38}{48} = 15\ \frac{19}{24}$ (41).

46 Para restar los quebrados, *hechos de una misma especie ó de un mismo denominador si no lo son, se restan los numeradores y se pone al residuo el denominador comun.* La diferencia de $\frac{7}{9}$ y $\frac{3}{9}$ es $\frac{4}{9}$, restando de 7, 3, y poniendo al residuo 4 el denominador 9: la de $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$ que reducidos son $\frac{6}{8}$ y $\frac{4}{8}$, es $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$: la de $5\ \frac{2}{3}$ y $4\ \frac{1}{6}$, esto es, de $5\ \frac{12}{18}$ y $4\ \frac{3}{18}$, es $1\ \frac{9}{18} = 1\ \frac{1}{2}$.

Para restar $\frac{2}{3}$ de 5 se toma de 5, 1, y reducido á $\frac{3}{3}$ (38), se resta de $4\ \frac{3}{3}$, $\frac{2}{3}$ y quedan $4\ \frac{1}{3}$. Si se ha de restar de $7\ \frac{2}{9}$, $\frac{5}{6}$, por ser $\frac{5}{6}$ mayor que $\frac{2}{9}$, se toma 1 de 7, y juntando $\frac{9}{9}$ que vale, con $\frac{2}{9}$; habrà que restar $\frac{5}{6}$ de $6\ \frac{11}{9}$, que dan de diferencia $6\ \frac{21}{54} = 6\ \frac{7}{18}$. Del mismo modo se hallará que restando de $10\ \frac{3}{8}$, $4\ \frac{6}{7}$, esto es, de $9\ \frac{11}{8}$, $4\ \frac{6}{7}$; resultan $5\ \frac{29}{56}$.

47 Un quebrado qualquiera $\frac{2}{5}$ se hará tres veces mayor ó se multiplicará por 3, haciendo 3 veces mayor el número 2 de sus partes, ó multiplicando por 3 su numerador 2, de que resulta $\frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5}$: para hacerle 8 veces mayor ó multiplicarle por 8, multiplicaré 2 por 8 así: $\frac{2 \times 8}{5} = \frac{16}{5}$: *luego un quebrado se*

multiplica por un número entero ó un entero por un quebrado, multiplicando por el entero el numerador sin tocar al denominador; de suerte que $\frac{3}{7}\times4=\frac{12}{7}$, $\frac{5}{100}\times11=\frac{55}{100}$ &c.

48 Por el contrario, para dividir un quebrado $\frac{6}{5}$ por un entero 3, se debe partir por él el numerador, y será el cociente $\frac{2}{5}$: y para que se pueda dividir quando el cociente no es exâcto, como en la division de $\frac{5}{7}$ por 4, multiplicaré numerador y denominador por 4, y convertido $\frac{5}{7}$ en $\frac{5\times4}{7\times4}$, partiré despues el numerador por 4, y tendré el cociente $\frac{5}{7\times4}$. De lo que se infiere *que para dividir un quebrado por un entero, se multiplica por el denominador dejando intacto al numerador*: $\frac{7}{9}$ partidos por 6 son $\frac{7}{9\times6}=\frac{7}{54}$; $\frac{5}{10}$ partidos por 8 son $\frac{5}{80}$.

49 Luego si habiendo de multiplicar un quebrado $\frac{3}{5}$ por otro $\frac{4}{7}$, multiplico $\frac{3}{5}$ por 4 que es 7 veces mayor que $\frac{4}{7}$, el producto $\frac{3\times4}{5}$ habrá que dividirle por 7 multiplicando por 7 su denominador 5, para sacar el verdadero $\frac{3\times4}{5\times7}=\frac{12}{35}$: y de consiguiente *se multiplicarán dos quebrados entre sí, multiplicando sus numeradores y despues sus denominadores para tener el numerador y denominador del producto*: $\frac{3}{5}$ por egemplo, multiplica-

dó por $\frac{5}{7}$, producirá $\frac{3\times5}{7\times9}=\frac{15}{63}=\frac{5}{21}$: $\frac{8}{10}\times\frac{12}{20}=\frac{96}{200}$: $6\frac{2}{3}\times\frac{16}{5}$, ó $\frac{20}{3}\times\frac{16}{5}=\frac{320}{15}=21\frac{5}{15}=21\frac{1}{3}$.

50 Si se hubiese de partir $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$ los reduciré á $\frac{10}{15}$ y $\frac{12}{15}$ de un mismo denominador, y será su cociente el de sus numeradores $\frac{10}{12}$ (29): y como estos resultan en dicha reduccion de multiplicar en cruz los términos de los quebrados, esto es, el 2 por el 5, y el 3 por el 4; tendremos *que dos quebrados se parten multiplicando sus términos en cruz*; es decir, el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el denominador del dividendo por el numerador del divisor, cuidando de poner el 1.[r] producto por numerador y el 2.º por denominador del cociente.

El de $\frac{1}{2}$ dividido por $\frac{3}{7}$, es multiplicando 1 por 7 y 2 por 3, $\frac{7}{6}$: el de $\frac{6}{11}$ partido por $\frac{7}{9}$ es $\frac{6\times9}{11\times7}=\frac{54}{77}$: últimamente el de $6\frac{3}{8}$ dividido por $4\frac{1}{4}$ ó de $\frac{51}{8}$ por $\frac{17}{4}$, es $\frac{204}{136}$. Para dividir un entero por un quebrado, se pone al entero 1 por denominador, y se divide despues: 6 ó $\frac{6}{1}$ divididos por $\frac{2}{3}$, dan $\frac{18}{2}=9$.

51 Si se pidiese reducir un quebrado $\frac{3}{5}$ á otro igual que tenga un denominador dado 10; multiplicaré el numerador 3 por 10, y al producto 30 dividido por el denominador 5 que da 6, pondré 10 por denominador, y

resultará el quebrado $\frac{6}{10}$ con el denominador 10, y del mismo valor que $\frac{3}{5}$: pues se ha multiplicado su numerador y denominador por un mismo número 10 (40). Quando el producto del numerador por el número dado no se puede dividir exâctamente, es impracticable la operacion. Si se hubiese de reducir el quebrado $\frac{2}{3}$ á otro con un denominador 7, resultaria $\frac{\frac{14}{3}}{7}$

52 Por esta operacion se averigua el valor de un quebrado qualquiera; por egemplo, $\frac{3}{4}$ de hora en minutos: pues multiplicando el numerador 3 por 60, número de minutos que hacen una hora, y dividiendo el producto 180 por el denominador 4, tendré 45 minutos: lo qual viene á ser reducir el quebrado $\frac{3}{4}$ á otro igual $\frac{45}{60}$ con el denominador 60. Para averiguar los reales á que equivalen $\frac{3}{5}$ de peso, multiplicaré 3 por 15 número de reales de un peso, y su producto 45 dividido por 5, dará 9 reales, valor de $\frac{3}{5}$ de peso.

53 Si se considera á un quebrado dividido en qualquiera número de partes iguales, una ó muchas de estas partes serán *un quebrado de quebrado*: como $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{4}$, que son dos partes de $\frac{5}{4}$ dividido en tres partes. Y como para dividir $\frac{5}{4}$ por 3 se multiplica 4 por 3 (48) y para tomar el cociente $\frac{5}{12}$ dos veces, hay que

multiplicar 5 por 2 (47); serán $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{4}$, $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$ $=\frac{10}{12}$: es decir, *que un quebrado de quebrado se reduce á quebrado sencillo, multiplicando entre sí los quebrados de que se compone.*

Y asi $\frac{1}{2}$ *de* $\frac{4}{7}$, será $\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{14}$: $\frac{6}{5}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{1}{3}$, que quiere decir, *seis quintas partes de los dos tercios de un tercio*, será $\frac{6}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{12}{45}$. De esta misma naturaleza es el quebrado $\frac{1}{6}$ *de* $\frac{2}{3}$, *de* 7, y equivale á $\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times7=\frac{14}{18}$. Quando en los cálculos ocurre algun quebrado de quebrado, se le reduce á sencillo.

QUEBRADOS DECIMALES.

54 Abrevia notablemente el cálculo de los quebrados el egecutarlo con los que se llaman *decimales*, que son aquellos que tienen por denominador 10, 100, 1000, &c. La facilidad de calcular estos quebrados nace de que cada una de sus cifras es 10 veces mayor que la siguiente como en los números enteros: y por eso se escriben como ellos sin denominador, el qual se colige del sitio que ocupan las cifras de su numerador, cuyo orden es el siguiente.

55 Despues de una coma que separa las decimales de los enteros, ó de un cero si no los hay, tienen su lugar las *décimas*, partes diez veces menores que las unidades, y cuyo denominador es 10. En el 2º lugar se ponen

las *centesimas*, que son diez veces menores que las décimas, y cuyo denominador es 100 En el 3.r lugar las *milésimas*, diez veces menores que las centésimas, y con el denominador 1000. En el 4º las *diez milésimas*: en el 5º las *cien milésimas*: en el 6º las *millonésimas*: en el 7º las *diez millonésimas* &c. continuando asi cada clase de partes diez veces menor que la anterior.

56 En la cantidad decimal 54,965, el 9 que la coma separa del entero 54, son 9 décimas ó $\frac{9}{10}$; el 6, seis centésimas ó $\frac{6}{100}$, y el 5, $\frac{5}{1000}$: y como $\frac{9}{10}$ son $\frac{900}{1000}$ (40), y $\frac{6}{100}$ son $\frac{60}{1000}$, se leerá dicho número 54 *unidades y novecientas sesenta y cinco milésimas*; y si los enteros se reducen tambien á milésimas, se tendrá $54,965 = 54\frac{965}{1000} = \frac{54965}{1000}$. En 1,08, que son *un entero y ocho centésimas*, manifiesta el cero que no hay décimas: 0,0307 expresan *trescientas y siete diez milésimas*.

57 De lo dicho se infiere lo 1º que los decimales se leen como si fueran enteros, añadiendo al fin el nombre de la especie de la última cifra, que se puede encontrar recorriéndolas todas desde la coma diciendo, *décimas*, *centésimas*, *milésimas* &c. Pero para leerlas y escribirlas; es mas fácil valerse de esta importante advertencia, que se colige de lo que llevamos dicho, *que todo quebrado decimal tiene por denominador á 1 con tantos*

ceros, como notas decimales hay en su numerador. Y asi 0,0340087, que debe tener por denominador á 1 con siete ceros, se leerá *trescientas quarenta mil ochenta y siete diez millonésimas*: y para escribir *trescientas mil novecientas y dos cien-millonésimas*, cuyo denominador ha de tener ocho ceros, deberé poner dos ceros antes de las seis cifras 300902 del numerador para que resulte 0,00302092, que es el quebrado pedido.

58 Lo 2º que los decimales no mudan de valor aunque se añadan ó quiten ceros á su derecha; porque como $\frac{5}{10}$ por egemplo, es lo mismo que $\frac{50}{100}$, que $\frac{500}{1000}$ &c. (40); será poniéndolos sin denominador, 0, 5 lo mismo que 0, 50 y que 0, 500 &c.

59 El reducir un quebrado comun á decimal viene á ser averiguar el valor de un quebrado en décimas, céntimas &c. conforme digimos (52): y como cada unidad tiene diez décimas, cada décima diez centésimas, y asi de las demas; se efectuará la reduccion multiplicando el numerador y todas las demas restas por 10, y dividiendo el producto por el denominador.

Para reducir $\frac{1}{4}$ á quebrado decimal, multiplicaré 1 por 10, y dividiendo por 4, tendré el cociente 2 que serán décimas: volveré á multiplicar por 10, 2 que sobraron, y á partir 20 por 4, y juntando el cociente ca-

bal 5 centésimas al 2, tendré 0, 25 = $\frac{1}{4}$. Como las restas de las divisiones son quebrados, se reducen de este modo á decimales, como se puede ver (64) en el eg. 1º

60 Los quebrados cuya última cifra del denominador sea 1, 3, 7, 9 no se pueden reducir exáctamente á decimales: como $\frac{4}{9}$ que es 0,44444 &c. donde dividiendo 40 por 9, les cabe a 4 y sobran siempre 4: y $\frac{3}{7}$ que equivale á 0,428571428571 42 &c. cuyas seis primeras cifras vuelven á salir como se continúe la reduccion. En estos casos y en los demas en que se usa de decimales, basta tomar las tres primeras cifras del quebrado, y las quatro ó cinco primeras si el cálculo pide mucha exâctitud, despreciando las demas por de poca entidad. En el quebrado 0,39574 se pueden despreciar en un cálculo regular sin error sensible el 7 y 4, usando solo del quebrado 0,395. Pero conviene advertir que quando la primera de las cifras que se desprecian pasa de 5, se añade 1 á la última de las que quedan; y así en el quebrado propuesto en lugar de 0,395 se ha de tomar 0,396, que se acerca mas á 0,39574 que 0,395. En el quebrado 0,70654 podremos tomar 0,706 ó 0,707.

Sumar, restar, multiplicar y partir Quebrados decimales.

61 Estos quebrados se suman por las mismas reglas que los números enteros, como se ve en el egemplo.

Se han de sumar	305,0078
	2,98
	34,069
	0,0015
	342,0583

62 Tambien se restan como los enteros, pero conviene hacer igual el número de decimales en minuendo y subtrahendo, añadiendo ceros al que tenga menos (58). En el primer egemplo se han añadido dos ceros al minuendo, y en el segundo quatro al entero 683.

I.

De.	8,4600
Restando.	3,0543
Quedan.	5,4057

II.

De.	683,0000
Restando. ..	16,6402
Quedan. ..	666,3598

63 *Las decimales se multiplican como si fuesen enteros, y despues se separan de la derecha del producto con la coma para decimales tantas cifras como notas decimales hay en multiplicando y multiplicador* : y si en dicho producto no hay tantas, se añaden á su izquierda en ceros las que faltan.

Si se pidiese el importe de 4, 8 *varas*, á razon de 35,67 *reales*, cada vara: despues de haber multiplicado 3567 por 48 considerándolos sin coma, se separan de la derecha del producto 171216 las tres cifras 216 para decimales, por tener dos el multiplicando y una el multiplicador. La razon es porque 35,67×4,8 es lo mismo que $\frac{3567}{100} \times \frac{48}{10} = \frac{171216}{1000}$ =171,216; la qual demostracion es facil aplicar á otro qualquier egemplo. Como en el 2º hay que separar seis cifras, y 714 tiene solo tres, se añaden á su izquierda tres ceros. En el 3.r eg. se averigua el valor de 0,554 de peso en reales, multiplicando 0,554 por 15, número de reales de un peso: de que resultan 8 rs. y 0,31 de real. Si se multiplica 0,31 por 34, tendré 10 mrs, y medio poco mas.

I.

Multiplicando.	35,67
Multiplicador	4,8
	28536
	14268
Producto.	171,216

II.

Multiplicando.	0,034
Multiplicador.	0,021
	34
	68
Producto.	0,000714

III.

0,554
15
2770
554
8,310

64 Para dividir estos quebrados, *se hacen dividendo y divisor de una misma especie*, esto es, de un mismo número de notas decimales, poniendo ceros al que tenga menos (58), y *quedará reducida la operacion á dividirlos como enteros.* Porque hechos de una misma especie debe caber el divisor en el dividendo las mismas veces que si fueran enteros. Si la division no es exâcta, se reduce á decimal el quebrado que resulte.

En el 1.r egemplo se dividen 171,216 reales importe de 4,8 varas, añadiendo á este divisor dos ceros para tenga como el dividendo tres cifras decimales: y resulta de cociente no haciendo cuenta con la coma, 35 y $\frac{3216}{4800}$, quebrado comun que reducido á decimal (59), es 0, 67 que con 35 compone el valor de la vara 35, 67. Por el 2º eg. se averigua la parte decimal que son de peso 8, 31 reales, dividiéndolos por 15, número de reales de un peso: para lo qual se añaden dos ceros á 15; y como entonces no cabe el

I.

```
171,216 |4,800
14400    35,67
 27216
 24000
  32160
  28800
   33600
   33600
       0
```

II.

```
8,310 | 1500
7500    0,554
 8100
 7500
  6000
  6000
     0
```

divisor en el dtvidendo, se tiene de cociente $\frac{831}{1500}$, que reducido á decimal es 0,554, parte de peso que se busca.

Si se hubiera preguntado que parte decimal son de peso 6 rs. y 26 mrs.; se reducirian primero á 230 mrs que son $\frac{230}{510}$ de peso, por componerse este de 510 mrs.; y hecho decimal este quebrado, resultaria $\frac{230}{510}$ = 0,4509, parte pedida con poca diferencia.

NUMEROS COMPLEJOS.

65 Se llaman asi los que contienen diferentes especies: como varas, pies y pulgadas; pesos, reales y maravedises. Vease una tabla de los mas comunes con las señales que los representan á la derecha, y á la izquierda las especies inferiores de que cada una de las superiores se compone.

MONEDAS.

Maravedises.................... (*mrs.*)

34	*Real*.................. (*rl.*)				
340	10	*Escudo*.............. (*esc.*)			
374	11	$1\frac{1}{10}$	*Ducado*.......(*duc.*		
510	15	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{11}$	*Peso*......(*pe.*)	
2040	60	6	$5\frac{5}{11}$	4	*Dob.*(*dob.*)

PESOS.

Grano. (*gr.*)

24	*Escrúpulo*. . . . . (*escr.*)				
72	3	*Adarme*. . . . . (*ad.*)			
576	24	8	*Onza*. . . . . (O.)		
4608	192	64	8	*Marco*. . . . . . . (*M.*)	
9216	384	128	16	2	*Libras*. . . . (*lib.*)

MEDIDAS.

Punto. . . . . (*p°*)

12	*Línea*. . . . . (*l.*)			
144	12	*Pulgada*. . . . . (*p.*)		
1728	144	12	*Pie*. . . . . (P.)	
5184	432	36	3	*Vara*. . . . . (*V.*)

TIEMPO.

Tercero. . . . . (‴)				
60	*Segundo.* . . . . (″)			
3600	60	*Minuto.* . . . . (′)		
216000	3600	60	*Hora.* . . . . (*h.*)	
5184000	86400	1440	24	*Dia.* (*d.*)

Sumar, restar, multiplicar y partir los Números complejos.

66 »Para sumarlos »se escriben en co- »lumnas sus diferen- »tes especies, se su- »man todas empezan- »do por la inferior, »sacando de la suma »de cada una las uni- »dades que componga de la especie superior »inmediata; con la que se juntan, poniendo »bajo de la columna lo que sobre, ó cero si »nada sobra.«

Se han de sumar.

4032 *d.* . .	3 *h.*	54′
316. . . .	18.	..15
1003. . .	. 28.	. 39
45. . . .	. 2.	. 20
5398 *d.*	5. *h.* . .	. 8′

La suma 128 de la primera columna del eg. contiene 2 *h.* y 8′, pongo estos por bajo;

y junto 2 *h.* con las de la segunda columna que suman 53 *h.* de las que escribo 5 que sobran, sacando 48 que componen 2 *d.*, los quales juntaré por último con los de la última columna.

67 »En la »resta se es»criben los »dos números »con la cor»responden»cia en las es»pecies, y co»menzando »por las me»nores, se res»ta el núme»ro inferior del superior juntando á este, quan»do es menor, una unidad de la especie in»mediata.« Sacada en el 1.r eg. la diferencia 4 de los *mrs.*, se añade á los 12 *rs.* de donde no se pueden restar 14 en la 2.a columna, 1 *pe.* hecho *rs.* y restando de 27 *rs.* que resultan, los 14, tendré 13; y despues se pasa á restar 585 de 648′

I.

De	648′*pe.*	12. *rs.*	19. *mrs.*
Rest.do	585....	14.....	15.
Quedan	62 *pe.*.	13 *rs.*	4. *mrs.*

II.

De	104′ *v.*.	0. *P*....	5 *p.*
Rest.do	84........	2.......	10
Quedan	19........	0..........	7

68 La multiplicacion de los números complejos puede hacerse reduciendo multiplicando y multiplicador á quebrados de la especie superior, y multiplicándolos despues segun dejamos dicho (49). Si se pidiese por eg. el

importe de 4 *v.* y 2 P. á razon de 8 *rs.* y 4 *mrs.* la vara; reduciré 4 *v.* 2 *P.* á 14 *P.* que son $\frac{14}{3}$ de vara; y 8 *rs.* 4 *mrs.* á 276 *mrs.* que son $\frac{276}{34}$ de real: multiplicaré despues $\frac{276}{34}$ por $\frac{14}{3}$, y el producto $\frac{3864}{102}$ que equivale á 37 *rs.* y 30 *mrs.* será el importe que se pide. El qual se saca tambien reduciendo los dos números à 8, 117 *rs.* y 4, 666 *var.*; pues su producto 37, 873922 es el mismo que el anterior con poca diferencia.

69 Busquemos ahora por otro método mas breve y cómodo el número de *varas* que tiene *un círculo* máxîmo de nuestro globo, esto es, una linea que le rodee todo, en la suposicion de que cada grado de los 360 en que se divide, tiene 57295 *v.* 8 *p.* 4 *l.* Comienzo á multiplicar 360 por 4, y el producto 1440 *l.* reducido á pulgadas dará 120. Multiplico despues 360 por 8 *p.* y tendré 2880 *p.* que con las 120 son 3000, ó 83 *v.* y 1 *P.* multiplico últimamente 57295 por 360, y añadiendo al producto 20626200, 83 *v.* y 1 *P.* tendré que el círculo máxîmo de la tierra tiene 20626283 *v.* y 1 *P.* »Luego un número complejo se multiplica por »otro incomplejo ó de una sola especie, multi»plicando sucesivamente por este todas las es»pecies del primero comenzando por la menor, »y reduciendo su producto á la superior.«

70 Quando ambos son complejos, como

si se pidiese el importe de 16 *v.* 2 *P.* y 6 *p.* á razon de 3 *Pe.* 8 *rs.* y 15 *mrs.* la vara; reducido este valor á 1817 *mrs.* y dividido por 36, número de pulgadas que tiene una vara, será el cociente $\frac{1817}{36}$ el valor de una pulgada: multiplíquese este valor por el número de pulgadas que tiene el multiplicador 16 *v.* 2 *P.* y 6 *p.* que son 606, y el producto $30586\frac{1}{6}$ *mri.* que hacen 59 *pe.* 14 *rs.* y $20\frac{1}{6}$ *mri.* será el que se busca.

»Luego para multiplicar dos números »complejos, se ha de dividir el multiplicando »reducido á sus menores partes, por el nú»mero de especies inferiores del multiplica»dor que hacen una superior, y multiplicar »despues el cociente por dicho multiplicador »reducido á su menor especie. El producto »resulta en especies inferiores del multiplican»do, que habrá que reducir á superiores como »en el egemplo anterior.“

71 Pero se previene 1º que en los casos en que los dos números se suponen de especies diferentes, se toma por multiplicando al que sea de la misma especie con el producto: como se practicó en el egemplo, tomandó á los pesos, reales y maravedises por multiplicando. 2º Que quando se han de multiplicar números que expresen ambos medidas de longitud, como 3 *v.* 1 P. y 2 *p.* por 2 *v.* 2 *P.* y 6 *p.* se reducen uno y

otro á 122 *p.* y 102 *p.* que es su menor especie, y multiplicando despues 122 por 102, su producto 12444 *p.* es el que se busca, y expresa una superficie como veremos en la Geometría.

	12 *rs.* 28 *mrs.*
	30 *v.* 1. *P.* 8. *p.*
30 *V.*×12 *rs.*...	360. *rs.* 00.. *mrs.*
30 *V.*×28 *mrs.*...	24.... 24.
1 *P.*—+—8 *p.* ×12 *rs.*—+—28 *mrs.*	7...... 4 2/9
	391. *rs.* 28 2/9 *mrs.*

En el antecedente egemplo en que es crecido el número 30 *v.* de las especies superiores del multiplicador, se abrevia la operacion multiplicando por él solo todo el multiplicando: de que resulta 30×12 *rs.*=360 *rs.* 30×28 *mrs.* = 840 *mrs.* = 24 *rs.* y 24 *mrs.* multiplicando despues por la regla anterior 12 *rs.* y 28 *mrs.* por 1 *P.* y 8 *p.* que produce 7 *rs.* y 4 2/9 *mrs.* y sacando la suma de las tres partidas que da el producto total 391 *rs.* y 28 2/9 *mrs.*

72 »Para dividir un número complejo »por un incomplejo; se dividen por él súcesi»vamente todas las especies del complejo: y »quando hay alguna resta se reduce á la es»pecie inferior inmediata.« Para averiguar el valor de una arroba, en el supuesto de que 68 arrobas han costado 864 *pe.* 12. *rs.* y 13

mrs. partiré primero 864 por 68; y tendré de cociente 12 *pe.* con 48 de resta, que reducidos á reales y juntos con 12, componen 732 *rs.* pártolos por 68 y salen 10 *rs.* con 52 de residuo: redúzcolos á *mrs.*, júntolos con 13, y dividiendo la suma 1781 por 68; tendré 26 $\frac{13}{68}$ *mrs.*: luego 12 *pe.* 10 *rs.* y 26 $\frac{13}{68}$ *mrs.* es el valor de la arroba.

73 Supongamos ahora que 12 *v.* 1. *P.* y 7 *p.* han costado 225 $\frac{1}{2}$ *pe.* y que se pide el valor de la vara. Averiguo primero el número de varas qae hay en el divisor 12 *v.* 1 *P.* y 7 *p.* reduciéndolo á 451 *p.* y partiéndolo por 36, número de pulgadas de una vara; parto despues por $\frac{451}{36}$, número de varas que resultan, el dividendo 225 $\frac{1}{2}$; y tendré de cociente 18, valor de cada vara.

Asimismo si 16 *v.* 2 *P.* y 6 *p.* han costado 59 *pe.* 14 *rs.* y 20$\frac{1}{6}$ *mrs.* y se pide el valor de la vara; averiguaré primero el número de varas del divisor 16 *v.* 2 *P.* y 6 *p.* ó de 606 *p.* dividiéndole por 36: partiré despues 59 *pe.* 14 *rs.* 20 $\frac{1}{6}$ *mrs.* ó $\frac{183517}{6}$ de *mrs.* por $\frac{606}{36}$, número de varas, y tendré de cociente 1817 *mrs.* ó 3 *pe.* 8 *rs.* y 15 *mrs.* valor de la vara.

Sacarémos pues la regla general siguiente para dividir un número incomplejo por otro complejo, ó un complejo por otro complejo: »Se partirá el divisor reducido á su

»menor especie, por el número de estas que »hacen una superior, y dividiendo despues »por lo que resulte, al dividendo reducido »tambien á sus menores partes, saldrá el co»ciente deseado.«

74 Tambien se pueden dividir los complejos reduciendo divisor y dividendo á quebrados, como se dijo en la multiplicacion, y dividiendo despues (68). El cociente de 37 *rs.* y 30 *mrs.* partidos por 4 *v.* y 2 *P.* que vienen á ser $\frac{1288}{34}$, $\frac{14}{3}$; es, dividiendo estos dos quebrados, $\frac{8864}{476}$: que equivale á 8 *rs.* y 4 *mrs.* el qual se pudo tambien sacar reduciendo dichas dos cantidades á decimales, y dividiéndolas despues.

75 Los complejos de una misma especie, como 16 *pe.* 2 *rs.* 2 *mrs.* y 3 *pe.* 3 *rs.* 14 *mrs.* se dividen reduciendo ambos á su menor especie, y dividiendo despues 8230 *mrs.* y 1646 *mrs.* que resultan; el cociente 5 indica las veces que el uno cabe en el otro, que es á lo que se reduce este caso de la division.

ELEMENTOS

DE ÁLGEBRA.

76 Queriendo los Matemáticos demostrar de un modo general las verdades que la Aritmética demuestra solo en casos particulares, para elevarse á superiores conocimientos; substituyeron á los números, cuyo valor es siempre determinado, cantidades generales representadas con las letras *a*, *b*, *c*, *d* &c. del alfabeto. De esta manera formaron una Aritmética universal que se llama *Álgebra*, que por medio de cantidades generales é indeterminadas no solo demuestra generalmente sus proposiciones, sino que expresando con singular sencillez y laconismo las ideas que maneja, conduce á resultados que la Aritmética no logra sin mucho rodeo, tanteos y trabajo; resuelve ademas infinitos problemas á que no alcanzan sus reglas, y subministra métodos para facilitar sus operaciones complicadas.

77 Cada una de las cantidades, *a*, *bc*, *dmn*, sè llama *incomplexâ*, *término* y *monomio*: la que tiene dos términos como $a+b$, $dt+c$, *binomio*: *trinomio* la que tiene tres, y en ge-

neral *complexâ* y *polinomio* la que consta de muchos.

78 Los signos +, — puestos á las cantidades significan el sentido en que se han de tomar: las que tienen el — que se llaman *negativas*, se toman en sentido contrario á las *positivas* que tienen el +, ó estan al principio sin signo: de manera que si + 20 con el signo + representa el caudal de una persona, — 20 representará igual cantidad de deuda: si b es el camino que se ha corrido ácia el Oriente, $-b$ será el corrido ácia el Ocidente: si a es el valor de una fuerza que obra de derecha á izquierda, $-a$ será la misma fuerza obrando de la izquierda ácia la derecha.

79 En lugar de aa se escribe para abreviar a^2, en lugar de bbb se pone b^3, en lugar de $cccc$, c^4: ahorrando con los números 2, 3, 4, que se llaman *exponentes*, la repeticion de las letras: en a, bc, dtm, es el exponente 1. $a^3 c^2$ equivale á $aaacc$; y b^2cd^4 à $bbcdddd$.

80 Tambien se escribe en lugar de $ab+ab$ $2ab$; en vez de $2ab+ab$, $3ab$; en lugar de $2ab+3ab$, $5ab$. Á los números 2, 3, 5, llamamos *coeficientes*, y espresan las veces que se ha de tomar la cantidad ab á quien preceden; es decir que la multiplican. El coeficiente de ab, m, cde &c. es 1.

Asimismo, en lugar de $-b-b$ se es-

eribe mas breve $-2b$; en vez de $-3bc-4bc$ se pone $-7bc$: en general los términos que tienen unas mismas letras y exponentes, que se llaman *semejantes*, se reducen á uno solo *sumando sus coeficientes, si tienen un mismo signo: y quando los signos son diferentes como en* 3ab $-$ ab, *se restan los coeficientes* 3 *y* 1, *y á la diferencia* 2ab *se le pone el signo* $+$ *del término mayor* 3ab.

Los términos b^2c-4b^2c se reducen á $-3b^2c$, restando 1 de 4, y poniendo á la diferencia el signo $-$ de la cantidad mayor $-4b^2c$: tambien $3c^2d+5ab^3+2c^2d-ab^3$ equivale á $5c^2d+4ab^3$, sumando 3 y 2, y restando 1 de 5. Ultimamente $ab^2-5cd-a^2b-2cd+7b^2d-cd-3b^2d$, se reduce sumando los coeficientes $-5-2-1$, y restando 3 de 7, á $ab^2-8cd-a^2b+4b^2d$: ab^2 y a^2b no son semejantes. Los términos $a-a$, $-2cd^2+2cd^2$, $3b^3c-3b^3c$ y demas semejantes iguales y de signos contrarios, se reducen á cero.

Sumar y restar cantidades algébricas.

81 Estas cantidades se suman *poniéndolas unas despues de otras con sus propios signos, y reduciendo las que haya semejantes.* La suma de a y b es $a+b$; la de c^2d, ab y $-3c^2d$ es $c^2d+ab-3c^2d$ ó $ab-2c^2d$, reduciendo, c^2d y $-3c^2d$.

82 Para restarlas *se escribe el minuendo, y*

junto á él el subtrahendo mudando los signos de sus términos el $+$ en $-$, y el $-$ en $+$. La cantidad b se resta de a escribiendo $a-b$: para restar de ab, $c-d$ pondré $ab-c+d$: asimismo la diferencia entre $6cd - a^2b^2d$ y $3cd - 4a^2b^2d \quad ax$, es $6cd - a^2b^2d - 3cd + 4a^2b^2d + ax$, que se reduce á $3cd + 3a^2b^2d + ax$.

83 Se mudan en sus contrarios los signos del subtrahendo, porque asi como la diferencia entre 10 y 8 es 10 disminuido de 8 ó $10-8$; asi tambien la diferencia entre la cantidad a y b, será a disminuido de b ó $a-b$. Pero como entre uno que tiene 10 doblones y otro que debe 8, cuyo haber es -8 (78), hay de diferencia $10+8$, tambien entre a y $-b$ habrá de diferencia $a+b$.

84 De lo qual y de lo dicho en la suma se infiere que las cantidades negativas disminúyen las positivas quando se suman con ellas, y las aumentan quando se restan. Con efecto, añadir deudas es disminuir caudal, y quitarlas es aumentarle: asi, no se debe equivocar el sumar con añadir y el restár con disminuir.

Multiplicacion.

85 Para practicar esta operacion con las cantidades monomias, *se multiplican sus coeficientes, se juntan despues todas las letras, y*

si las hay semejantes, se escribe una sola con la suma de sus exponentes (79): últimamente, se pone al producto el signo $+$ *si los factores tienen ambos un mismo signo, y el* $-$ *si le tienen diverso.*

El producto de $+a\times+b$ es $+ab$: el de $+a^2b\times ac^3d$ es a^2bac^3d, ó a^3bc^3d, escribiendo una vez la a y sobre ella la suma 3 de sus exponentes: para multiplicar $+2ab$ por $-3ac$, diré $-\times$ da $-$ (usamos de $+$ y $-$ en lugar de *cantidad positiva* y *negativa*): 2×3 es 6, y juntando las letras tendré de producto $-6abac$ ó $-6a^2bc$: tambien sacaré el producto de $-3a^2b^3c\times-6bcx$ multiplicando $-$ por $-$ que da $+$, despues 3 por 6 que es 18, y juntando las letras, de que resulta $18a^2b^4c^2x$: últimamente $-5m^2q\times4amq^2$ produce $-20am^3q^3$.

86 Esta regla que se percibe facilmente por lo que toca á los coeficientes, ha sido en quanto á juntar las letras una mera convencion de los Matemáticos. Por lo que toca á los signos es evidente que multiplicar una cantidad positiva $+a$ ó negativa $-b$ por otra positiva 3 es tomar $+a$ ó $-b$ tres veces: luego en el primer caso será el producto $+3a$ y en el segundo $-3b$, es decir $+\times+=+$ y $-\times+=-$. Asimismo, multiplicar $+a$ cantidad positiva ó $-b$ negativa por -3 es tomar $+a$ ó $-b$ tres veces, pero al contrario de como se tomarian si el multiplicador fuera $+3$; luego si en este caso

serian los productos $+3a$, $-3b$, deben ser en el presente $-3a$ y $+3b$: y $+\times-=-$, $-\times-=+$ conforme lo digimos en la regla. Si en lugar de 3 de que hemos usado para mayor claridad, ponemos c, quedará la demostracion mas general.

87 *Un polinomio se multiplica por un monomio, multiplicando por este todos los términos del primero.* En el 1.r eg. se multiplican por $-4a^2bc$ los tres términos de $3bc^2-5a^3b-b^2c$.

I.

$3bc^2-5a^3b-b^2c$	*Multiplicando*
$-4a^2bc$..............	*Multiplicador*
$-12a^2b^2c^3+20a^5b^2c+4a^2b^3c^2$	*Producto.*

88 *Quando ambos son polinomios, se multiplican como en los números todos los términos del multiplicando por cada término del multiplicador*: y aunque es indiferente comenzar por la izquierda ó por la derecha, esto último es lo mas comun.

II.

$5m-tb+4a^2$	*Multiplicando*
$3d^2-cn$	*Multiplicador*
$15d^2m-3bd^2t+12a^2d^2$	
$-5cmn+bcnt-4a^2cn$	
$15d^2m-3bd^2t+12a^2d^2-5cmn+bcnt-4a^2cn$	*Prod.*

III.

$3bc^2 - 5a^2b - b^2d$ ....*Multiplicando*

$2bc^2 - 3a^2b + 4b^2d$ ....*Multiplicador*

1.r Prod.to $6b^2c^4 - 10a^2b^2c^2 - 2b^3c^2d$

2.o .... $- 9a^2b^2c^2 + 15a^4b^2 + 3a^2b^3d$

3.o .... $12b^3c^2d - 20a^2b^3d - 4b^4d^2$.

Total $6b^2c^4 - 19a^2b^2c^2 + 10b^2c^3d + 15a^4b^2 - 17a^2b^3d - 4b^4d^2$

En el 2.º eg. se multiplica como en el 1.º todo el multiplicando por $3d^2$, y luego se multiplica del mismo modo por $-cn$, sumando despues los dos productos que resultan. Y esto mismo se egecuta en el 3.r eg. con sola la diferencia de que se reducen en la suma algunos términos semejantes.

89 Suele no ser necesario efectuar la multiplicacion, y entónces se indica incluyendo en un paréntesis ó bajo de una raya los factores polinomios: $\overline{a+b}\times c$ ó $(a+b)\,c$ expresan el producto de $a+b$ multiplicado por c: y $(a+b)(c-bd+3)$ ó $\overline{a+b}\times\overline{c-bd+3}$ el de $a+b$ y $c-bd+3$.

Division.

90 Como $4a^3bc$ multiplicado por $3a^2b$ da de producto $12a^5b^2c$; si se divide $12a^5b^2c$ por $3a^2b$, ha de ser su cociente $4a^3bc$ (22).

Para esto se saca $\frac{12}{3}=4$, y se quitan a^2b que hay comunes en dividendo y divisor, asi como en la multiplicacion se juntaron a^3bc con a^2b, y resulta $4a^5bc$: asimismo para partir $6a^3bc$ por $4dc$, se reduce $\frac{6}{4}$ á $\frac{3}{2}$, y quitando c comun, queda de cociente el quebrado $\frac{3a^2b}{2d}$: últimamente, el cociente de $5cd$ dividido por $15a^2c^2d$ debe ser $\frac{1}{3a^2c}$: reduciendo $\frac{5}{15}$ á $\frac{1}{3}$, quitando de ambas partes cd comun, y poniendo 1 en el numerador que queda sin números y letras.

Luego generalmente »las cantidades mo»nomias se dividen 1º haciendo de dividen»do y divisor un quebrado, que se reduce á »enteros ó á términos mas sencillos quando »se puede. 2º Quitando las letras comunes à »denominador y numerador, poniendo en este »1 si queda sin letras y números. 3º Como »el cociente multiplicado por el divisor ha »de dar el dividendo; si este y el divisor »tienen un mismo signo, se pone al cociente »el +, y − quando le tienen diverso.«

El cociente de a partido por b es $\frac{a}{b}$, que no admite reduccion: el de $8a^2bd$ partido por $-4a^2d$, es $\frac{8a^2bd}{-4a^2d}$, que se reduce asi: + partido por − es −; 8 partido por 4 es 2; quito a^2d comun á los dos términos, y resulta

por último $-2b$. El cociente de $3m^2$ partido por $15a\ m^4$ es $\frac{3m^2}{15a^2m^4}$, que reduciendo $\frac{3}{15}$ á $\frac{1}{5}$, y quitando m^2 comun; queda en $\frac{1}{5a^2m^2}$: el de $-2a^3b^2x$ dividido por $-6ab^3m$ que es $\frac{-2a^3b^2x}{-6ab^3m}$, se reduce haciendo $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, y quitando ab^2 comun, á $\frac{a^2}{3bm}$: á este y al anterior se ha puesto el signo $+$ por tener un mismo signo dividendo y divisor. Ultimamente $\frac{-2n^2x}{2nx}$ se reduce á $-n$.

91 Las cantidades que se quitan por comunes á dividendo y divisor, forman siempre un quebrado igual á 1 (39), que multiplica á lo restante del cociente, cuya omision no varía su valor antes le simplifica: $\frac{a^2b^2c}{a^2b}$ por egemplo, es lo mismo que $\frac{a^2b}{a^2b}\times bc$, que se reduce á $1\times bc$ ó á bc, por ser $\frac{a^2b}{a^2b}=1$.

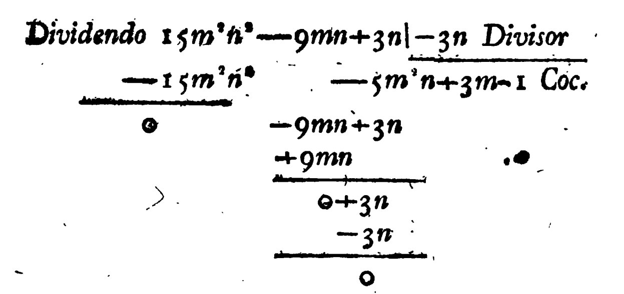
92 Quando dichas letras comunes son semejantes como sucede en $\frac{a^4}{a^3}$, el quitar a^3 que hay comun, es lo mismo que restar del exponente 4 del dividendo el 3 exponente del divisor, para que resulte el cociente $a^{4-3}=a$. Tambien se saca el de $\frac{a^3b^2}{a\ b}$ que es ab, asi,

$a^{3-2}b^{2-1}=ab$ &c. Sacando de esta manera el cociente de $\frac{a^m}{a^m}$ resulta $a^{m-m}=a^0$; y como $\frac{a^m}{a^m}$ es 1 (39); será $a^0=1$, esto es, *será 1 toda cantidad cuyo exponente es cero*; de suerte que $b^0=1$, d^0 $c^0=1$, $(a+cd-b^2)^0=1$.

93 Asimismo, si se resta en $\frac{a}{a^4}$, 4 de 1 (92), sale de cociente $a^{1-4}=a^{-3}$; y como $\frac{a}{a^4}$ es $\frac{1}{a^3}$ quitando a comun; será lo mismo a^{-3} que $\frac{1}{a^3}$. Haciendo la resta en $\frac{a^m}{a^{2m}}$ se tiene $a^{m-2m}=a^{-m}$, quitese en $\frac{a^m}{a^{2m}}$ que es $\frac{a^m}{a^m\ a^m}$ (85), a^m comun, y quedará $\frac{1}{a^m}$: luego a^{-m} es lo mismo que $\frac{1}{a^m}$: es decir, *una cantidad con exponente negativo equivale á 1 dividido por dicha cantidad con el mismo exponente positivo*. De lo qual se deduce el modo de trasladar una cantidad del uno al otro término de un quebrado quedando el mismo; pues basta mudar el signo á su exponente: $\frac{bd}{a^4c}$ por egemplo es lo mismo que $bda^{-4}c^{-1}$: $\frac{c^2d}{cd^3}$ equivale á $c^{2-1}d^{1-3}=cd^{-2}$ &c.

94 Para dividir el polinomio $15m^2n^2 - 9mn+3n$ por el monomio $-3n$, se dividen por el sucesivamente los tres términos del dividendo como se ve en el 1.r egemplo.

Exemplo I.



95 En la division de los polinomios se observa el mismo orden que en la de los números. Para dividir por B la cantidad A del 2º egemplo, diré; $2a^4$ partido por $2a^2$ es reduciendo, a^2 que pondré en el cociente; multiplico por él el divisor, y mudando los signos al producto C para restarle del dividendo; tendré reduciendo los términos semejantes, el residuo D, que prosigo partiendo asi: $-10a^3b$ partido por $2a^2$ es reduciendo

$-5ab$, que pongo tambien en el cociente; multiplico por él el divisor, resto el producto E de D, y reduciendo D y E, tendré de diferencia F: que dividiré últimamente, diciendo, $12a^2b^2$ partido por $2a^2$ es $6b^2$, por quien multiplicaré el divisor, y restando su producto G de F, resulta cero y $a^2-5ab+6b^2$ de cociente.

Exemplo II.

(A) $2a^4-13a^3b+31a^2b^2-38ab^3+24b^4$ | (B.) $2a^2-3ab+4b^2$ Div.

$a^2-5ab+6b^2$ Coc.

(C) $-2a^4+3a^3b-4a^2b^2$

(D)... $-10a^3b+27a^2b^2-38ab^3+24b^4$

(E)... $+10a^3b-15a^2b^2+20ab^3$

(F)... $12a^2b^2-18ab^3+24b^4$

(G).. $-12a^2b^2+18ab^3-24b^4$

0

Egemplo III.

Dividendo x^4-z^4 | $x-z$ *Divisor*

$x^3+x^2z+xz^2+z^3$

$-x^4+x^3z$

x^3z-z^4

$-x^3z+x^2z^2$

$x^2z^2-z^4$

$-x^2z^2+xz^3$

xz^3-z^4

$-xz^3+z^4$

0

Egemplo IV.

Dividendo... 1	$1 - a$ *Divisor*
$-1 + a$	$1 + a + a^2 + a^3 +$ &c.
a	
$-a + a^2$	
a^2	
$-a^2 + a^3$	
a &c.	

En el 3.r egemplo se parte x^4 por x, se multiplica el cociente x^3 por el divisor y restando su producto del dividendo, resulta $x^4 - z^4 - x^4 + x^3z$ que se reduce á $x^3z - z^4$, que se continúa partiendo del mismo modo. Las cantidades del 4º egemplo no tienen cociente exâcto y se puede continuar su division hasta el infinito.

96 Para facilitar la division de los polinomios se ordenan dividendo y divisor con relacion á qualquiera letra que se halle en todos ó los mas de sus términos, escribiendo primero en ambos aquel que contenga el mayor exponente de dicha letra, despues el que contenga el mayor exponente de los que queden, y asi de los demas. En las cantidades A y B del 2º exemplo, ordenadas respecto de la letra a, se halla a^4 en el 1.r término del di-

videndo; en el 2º a^3, en el 3º a^2 &c. el primero del divisor tiene a^2 y el segundo a. Los términos en donde se halle la letra con un mismo esponente se ordenan con respecto á otra letra.

Quebrados literales.

97 Los quebrados literales se calculan por las mismas reglas que los numéricos. Una cantidad qualquiera a por egemplo, se reduce à $\frac{2a}{2}$ multiplicando por el denominador 2 (38): si se multiplica por m se reduce á $\frac{am}{m}$: y á $\frac{abc}{bc}$, $\frac{ab+ad}{b+d}$ multiplicándola por bc y por $b+d$. Luego si á todos estos quebrados se quitan las letras comunes á su numerador y denominador, se reducirán á a: $\frac{am}{m}$ es a quitando m comun, y $\frac{ab+ad}{b+d} = \frac{a(b+d)}{b+d} = a$, quitando de ambos términos $b+d$.

98 Un entero con un quebrado $b+\frac{a}{2}$ se reduce multiplicando b por 2 (42), á $\frac{2b+a}{2}$; $\frac{3a^2}{m}-1$ es, multiplicando -1 por m, $\frac{3a^2-m}{m}$

y $3a + \frac{ed}{t-c}$ equivale á $\frac{3at - 3ac + cd}{t-c}$, multiplicando $3a$ por $t - c$. Al contrario, $\frac{ac-b}{c}$ se reduce dividiendo por c el numerador, á $a - \frac{b}{c}$: y $\frac{2cd - 2d^2 - a + b}{c-d}$ es, partiendo por $c - d$, $2d - \frac{a+b}{c-d}$.

99 Los quebrados $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{2}$, $\frac{dt}{b^2}$ se reducen á un mismo denominador multiplicando a y b por el producto $2b^2$ de los otros denominadores: c y 2 por b^3: dt y b^2 por $2b$: y resultan $\frac{2ab^2}{2b^3}$, $\frac{b^3c}{2b^3}$, $\frac{2bdt}{2b^3}$: $\frac{a-b}{1+t}$ y $\frac{3-c^2d}{a+b}$ se reducen multiplicando por $a+b$ los términos del primer quebrado, y por $1+t$ los del segundo, á $\frac{a^2-b^2}{a+b+at+bt}$: y $\frac{3+3t-c^2d-c^2dt}{a+b+at+bt}$. Los quebrados $\frac{3a}{nt}$, $\frac{b}{cn}$ que tienen un factor comun n en sus denominadores, se reducen á $\frac{3ac}{cnt}$, $\frac{bt}{cnt}$ de un mismo denominador, solo con multiplicar los dos términos del 1.r quebrado por c y los del 2.º por t.

100 La suma de $\frac{4ab}{5}$ y $\frac{ab}{4}$ es reduciéndolos á $\frac{16ab}{20}$ y $\frac{5ab}{20}$ de un mismo denominador, sumando sus numeradores y poniendo

á la suma el denominador comun, $\frac{21ab}{20} = ab + \frac{ab}{20}$. Del mismo modo se encuentra la suma de $\frac{3ax}{4m^2}$ y $\frac{4c^2}{x}$ que es $\frac{3ax^2 + 16c^2m^2}{4m^2x}$; y la de $\frac{ab}{x}$ y 1, que es $\frac{ab+x}{x}$.

101 Si se restan los numeradores de $\frac{4ab}{5}$ y $\frac{ab}{4}$, despues de hacerlos de un mismo denominador, y se pone al residuo el denominador comun, será $\frac{11ab}{20}$ la diferencia: la de $\frac{3cd}{4b^2}$ y $\frac{5}{2b}$ ó de $\frac{6bcd}{8b^3}$ y $\frac{20b^2}{8b^3}$, es $\frac{6bcd-20b^2}{8b^3} = \frac{3cd-10b}{4b^2}$: y la de $\frac{ab}{x}$ y 1 es $\frac{ab-x}{x}$.

102 El producto de $\frac{3c}{b^2} \times \frac{4d^2}{c}$ es, multiplicando numeradores y denominadores $\frac{12cd^2}{b^2c} = \frac{12d^2}{b^2}$: el de $\left(\frac{3a^2-b}{c^2-1}\right) \times \frac{2}{5}$ es $\frac{6a^2-2b}{5c^2-5}$ y el de $3b \times \frac{cd}{4a^2}$ es $\frac{3bcd}{4a^2}$, multiplicando $3b$ por el numerador.

103 Ultimamente, multiplicando en cruz

los términos de los quebrados $\frac{ab}{m}$ y $\frac{cd}{3}$ saldrá su cociente $\frac{3ab}{cdm}$: el de $\frac{2-a}{t}$ partido por $\frac{3}{c-b}$, es $\frac{2c-2b-ac+ab}{3t}$: el de $\frac{7x^2-t}{a-b}$ dividido por $6h$, es $\frac{7x^2-t}{6ah-6bh}$, multiplicando $a-b$ por $6h$: y el de $4m^2$ partido por $\frac{3}{4}$, será $\frac{16m^2}{3} = 5m^2 + \frac{m^2}{3}$.

Para mayor egercicio de estas reglas conviene dividir cantidades, cuyo cociente es infinito, y se compone de quebrados: como la del presente egemplo, en el que despues de haber sacado el primer término del cociente $\frac{a}{b}$, y multiplicado por él el divisor; se resta del dividendo a su producto $a + \frac{ad}{b}$. El residuo es $-\frac{ad}{b}$, que dividido por b, da $-\frac{ad}{b^2}$, 2.º término del cociente: con el que se practíca lo que con el antecedente, continuando la operacion, hasta conocer el órden que guardan dichos términos: en el presente caso cada uno se forma del anterior multiplicando por $\frac{d}{b}$: y alternan los signos + y –

a....... *Dividendo* | $b+d$ *Divisor*

$-a-\frac{ad}{b}$ Cociente $\frac{a}{b}-\frac{ad}{b^2}+\frac{ad^2}{b^3}-\frac{ad^3}{b^4}$

$-\frac{ad}{b}$

$+\frac{ad}{b}+\frac{ad^2}{b^2}$

$\frac{ad^2}{b^2}$ &c.

104 El divisor comun de las cantidades literales se encuentra por el mismo método que el de los números (33); pero ántes de la operacion se deben ordenar los términos de las cantidades conforme digimos en la division (96), y suprimir en cada una de ellas qualquier divisor comun que nò lo sea de la otra. Tambien en el discurso de la operacion se puede multiplicar el dividendo ó divisor por qualquiera cantidad que no sea factor ó divisor de la otra: y mudar, si conviene, los signos de todos los términos de qualquiera de ellas. Ninguna de estas operaciones altera el divisor comun de las cantidades; pues ab^2c, y bcn tienen el mismo divisor comun bc que ab^2cm, producto de ab^2c por m, y que b^2c cociente de ab^2c partido por a.

Si se pidiese por exemplo, el divisor comun de $a^2-3ab+2b^2$, y $a^2-ab-2b^2$, dividiré la 1ª cantidad por la 2ª y tendré el

cociente 1, y la resta $-2ab+4b^2$; parto ahora $a^2\ ab-2b^2$ por $-2ab+4b^2$, ó por $-a+2b$ quitando su divisor comun $2b$ que no lo es del dividendo: el cociente es exâcto, y de consiguiente $-a+2b$ es el divisor comun de las cantidades propuestas.

Para encontrar el mayor divisor comun de $5a^3-18a^2b+11ab^2-6b^3$, y $7a^2-23ab+6b^2$; hay que multiplicar ántes la primera cantidad por 7 para que $5a^3$ dé un cociente cabal. Partiré pues $35a^3-126a^2b+77ab^2-42b^3$ por $7a^2-23ab+6b^2$: el cociente es $5a$, y la resta $-11a^2b+47ab^2-42b^3$ en la que suprimiré b comun á todos sus términos, y que no lo es á los del divisor: multiplico este por 7 para que la division sea exâcta, y partiendo $-77a^2+329ab-294b^2$ por $7a^2-23ab+6b^2$; tendré el cociente -11, y $76ab-228b^2$ de residuo. Ahora debo dividir $7a^2-23ab+6b^2$, que ha hecho de divisor hasta aqui, por $76ab-228b^2$, multiplicando ántes el dividendo por 76 para que pueda hacerse la division; pero como 76 es factor del divisor, le reduciré antes á $a-3b$; y pues dividiendo por él $7a^2-23ab+6b^2$, nada queda; concluyo que $a-3b$ es el comun divisor que busco.

Á veces es menester para poder encontrar el comun divisor, ordenar las dos cantidades con relacion á otra letra diferente de aquella,

respecto de la qual se han ordenado, ya sea en el principio, ya en el discurso de la operacion.

Para demostrar generalmente este método, supongo que se trate de encontrar el divisor comun de A y B: si partiendo A por B resulta el cociente q, y el residuo m; será $A = Bq + m$. Divídase B por m, y sea el cociente p, y la resta r; tendrémos $B = mp + r$. Finalmente, si partiendo la primera resta m por la segunda r, resulta un cociente exâcto n; será $m = rn$: y r el mayor divisor comun de A y B. En efecto, si r divide exâctamente á mp, múltiplo de m, y de consiguiente á $mp + r = B$: por la misma razon dividirá á Bq, y á $Bq + m = A$: luego r es el divisor comun de A y B. Por otra parte es el mayor; pues si A y B pudiesen tener un divisor comun x mayor que r; dividiendo x á B, dividiria á su parte Bq: y dividiendo á A y á Bq, dividiria tambien á m. Partiria pues á mp: y como ha de dividir á B y á su parte mp, deberia partir tambien la otra parte r, lo que es imposible si x es mayor que r: luego r es el mayor divisor comun de A y B.

Fracciones continuas.

105 Tratemos de expresar el valor próximo del quebrado $\frac{100000}{314159}$. Parto sus dos términos por el numerador 100000, tendré $\cfrac{1}{3 + \frac{14159}{100000}}$: divido ahora los dos términos del

quebrado $\frac{14159}{100000}$ por su numerador 14159: saldrá $\frac{1}{7+\frac{887}{14159}}$: vuelvo á partir por 887 el numerador y denominador del nuevo quebrado, y será el cociente $\frac{1}{15+\frac{854}{887}}$, divido otra vez por 854 los dos términos de $\frac{854}{887}$, y me resultará $\frac{1}{1+\frac{33}{854}}$, que podré continuar partiendo. Junto ahora todos los cocientes anteriores, y tendré que el quebrado $\frac{100000}{314159}$ equivale

á.. $\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1}+\&c.}}}$

espresion que se llama *fraccion continua*.

Su 1.er término despreciando los demas, es $\frac{1}{3}$: los dos primeros componen $\frac{1}{3+\frac{1}{7}} = \frac{1}{\frac{22}{7}} = \frac{7}{22}$: los tres $\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{15}}}$ son $\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{106}{15}}} = \frac{1}{3+\frac{15}{106}} = \frac{1}{\frac{333}{106}} = \frac{106}{333}$, &c. y los quebrados $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{106}{333}$, $\frac{113}{355}$ &c. expresan el valor próximo de $\frac{100000}{314159}$: el 1.º es mayor, el 2.º menor, el 3.º mayor, el 4.º menor &c. acercándose cada vez mas al verdadero.

En general el quebrado $\frac{A}{B}$ se resuelve en la fraccion continua $\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}+\&c.}}}$ dividiendo los dos términos de cada quebrado por el numerador, y su po-

niendo que el 1.r cociente sea a, el 2º b, el 3º c &c.

Formacion de las Potencias y extraccion de las Raices.

106 Si una cantidad qualquiera a se multiplica por sí, el producto $a\times a=a^2$, se llama *cuadrado*, ó potencia segunda de a; (podremos llamar potencia primera al producto de $a\times 1$ que es la misma a). Si el cuadrado a^2 se multiplica por a, su producto $a^2\times a=a^3$ se llama *cubo* ó potencia tercera de a. Si se vuelve á multiplicar por a el cubo a^3, resulta $a^3\times a=a^4$, potencia quarta de a; a^4 multiplicando por a, da su potencia quinta a^5; y $a^5\times a$ da a^6, su potencia sesta; a^7 es la séptima de a... a^m su potencia m, y a^{2t} su potencia $2t$. Los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,... m, $2t$ expresan el grado de la potencia, y se llaman *sus exponentes*; 2 del cuadrado, 3 del cubo, m de la potencia m.... Asimismo 7×7 da 49 cuadrado de 7; 49×7 produce su cubo 343; $343\times 7=2401$ es su quarta potencia. Últimamente, multiplicando $3b^2c$ por $3b^2c$ se tendrá su cuadrado $9b^4c^2$; este multiplicado por $3b^2c$ produce su cubo $9b^4c^2\times 3b^2c=27b^6c^3$; y $27b^6c^3\times 3b^2c=81b^8c^4$ es su potencia quarta.

La cantidad a que sirvió de multiplica-

dor, se llama *raiz*, cuadrada de a^2, cúbica de a^3, quarta de a^4.... y raiz m de a^m: y los números 2, 3, 4...., m expresan el grado de la raiz. Tambien 7 es raiz cuadrada de 49, cúbica de 343, quarta de 2401: $3b^2c$ es raiz cuadrada de $9b^4c^2$, cúbica de $27b^6c^3$ &c.

107 Tendremos pues »que una cantidad »se sube al cuadrado multiplicándola por sí »una vez; se sube al cubo multiplicando dos »veces por la cantidad; á la quarta potencia »multiplicando tres veces.... y en general se »sube qualquier cantidad á qualquier poten- »cia multiplicando por la cantidad tantas ve- »ces ménos una como unidades tiene el espo- »nente de la potencia.«

108 Como en el cuadrado de un monomio qualquiera b^2 es b dos veces factor, en el cubo b^3 tres veces, en su potencia quarta b^4 quatro, y en su potencia m que es b^m, m de veces; se podrán elevar mas fácilmente á sus potencias las cantidades algébricas monomias *multiplicando sus esponentes por los de las potencias*, elevando los coeficientes por la regla general (107).

109 Quando los monomios son positivos lo son tambien todas sus potencias, y se les pone el signo $+$: pero si son negativos serán positivas sus potencias pares 2ª 4ª 6ª 8ª.... 2ma, y negativas las impares 3ª 5ª 7ª 9ª....

3^{ma}; y así se les ha de dar el signo $-$: como se colige de la regla de la multiplicacion.

El cuadrado de ab^2 es $a^{1\times2}b^{2\times2}=a^2b^4$: el cubo de $-3c^2d$ es $-3\times-3\times-3\times c^{2\times3}d^{1\times3}=-27c^6d^3$, la quinta potencia de $2b^3dt^2$ es $32b^{3\times5}d^{1\times5}t^{2\times5}=32b^{15}d^5t^{10}$; y generalmente la potencia m de tc^2 es $t^{1\times m}c^{2\times m}=t^m c^{2m}$.

110 Los quebrados se elevan á sus potencias subiendo á ellas por las reglas dadas su numerador y denominador. El cuadrado de $\frac{7}{9}$ es $\frac{7}{9}\times\frac{7}{9}=\frac{49}{81}$: la quarta potencia de $\frac{3}{5}$ es $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{81}{625}$; el cubo de $\frac{2cb^3}{3m^2}$ es $\frac{8c^3b^9}{27m^6}$ y la potencia n de $\frac{ab^2}{c^5}$ es $\frac{a^nb^{2n}}{c^{5n}}$.

111 Luego para sacar la raiz de una potencia qualquiera monomia *se dividirá el esponente de la cantidad por el de la raiz*; esto es, *por el número que expresa su grado.*

112 En los quebrados se saca la raiz sacándola de sus dos términos: y si la cantidad tiene coeficiente, se saca de él la raiz por las reglas que daremos despues.

De a^2b^4 por egemplo, se extraerá la raiz cuadrada dividiendo los esponentes 2 y 4 por el del cuadrado que es 2, y se tendrá $a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{4}{2}}=ab^2$: la raiz cúbica de $\frac{8a^3b^6}{c^3}$ es, sacando la de 8 que es 2, y dividiendo los esponentes

3 y 6 por el de la potencia 3, $\frac{2a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{6}{3}}}{c^{\frac{3}{3}}} = \frac{2ab^2}{c}$:

la quarta de $\frac{b^4}{16}$ es $\frac{b}{2}$; la raiz m de $\frac{a^m b^{2m}}{c^{3m}}$ es $\frac{ab^2}{c^3}$.

113 Se pone el signo + á la raiz de la potencia positiva si es impar; pero si es par se le dan á la raiz los dos signos $\pm$; pues una potencia par positiva a^2 ó vendrá de $a \times a$, ó de $-a \times -a$ que ambos producen a^2. Si es impar y negativa la potencia, se pone á la raiz el signo $-$. La raiz par de una potencia negativa es imposible; pues toda potencia par es positiva. Todo esto se colige de las reglas de la multiplicacion de los signos.

114 Quando dividiendo el esponente de la cantidad por el de la raiz no resulta cociente exâcto, como sucede sacando la raiz cúbica de b^5 que es $b^{\frac{5}{3}}$; se deja en fraccion el esponente, y representa una raiz que está por sacar: b^5 se llama cubo imperfecto, porque no hay raiz que multiplicada por sí dos veces produzca b^5: 3 es cuadrado imperfecto, porque no hay cantidad que multiplicada por sí produzca 3. Estas raices que se llaman *irracionales*, se suelen expresar poniendo las potencias bajo del signo $\sqrt{}$, que se

llama *radical*, y entre sus palos el número que indique el grado de la raiz. $\sqrt[2]{3}$ ó $\sqrt{3}$ representa la *raiz cuadrada de* 3 : $\sqrt[3]{b^5}$ *la raiz, cúbica de* b^5 ; $\sqrt[4]{\frac{cd^2}{3a^3}}$ expresa la raiz quarta de $\frac{cd^2}{3a^3}$; y en general $\sqrt[m]{\frac{a^n}{b^t}}$ la raiz m de $\frac{a^n}{b^t}$.

115 Tendremos pues, que la raiz n de a^m podrá expresarse de una de estas dos maneras $a^{\frac{m}{n}}$ ó $\sqrt[n]{a^m}$; y diremos en general, *que una cantidad con un esponente fraccionario, equivale á un radical cuyo esponente es el denominador del quebrado, y el numerador esponente de la cantidad.* De suerte que $a^{\frac{1}{3}}$ será lo mismo que $\sqrt[3]{a}$, $b^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{b^3}$, $a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{a^3b^5}$. Al contrario, $\sqrt[4]{cd^3}=c^{\frac{1}{4}}d^{\frac{3}{4}}$: $\sqrt[n]{\frac{a^t}{b^r}}$

$$=\frac{a^{\frac{t}{n}}}{b^{\frac{r}{n}}}.$$

116 Los polinomios se elevan á sus potencias por la regla general (107). Por egemplo, si se multiplica $a+b$ por $a+b$, resultará su cuadrado $a^2+2ab+b^2$; este multiplicado por $a+b$ dará su cubo a^3+3a^2b+

$3ab^2 + b^3$: este vuelto á multiplicar por $a+b$ da su quarta potencia $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ &c. Si se multiplica $2cd^2 - \frac{3}{5} + am^2$ por si, dará su cuadrado $4c^2d^4 - \frac{12cd^2}{5} + \frac{9}{25} + 4acd^2m^2 - \frac{6am^2}{5} + a^2m^4$. Muchas veces que no son necesarios los términos de las potencias, nos contentamos con indicarlas: $(a+b)^2$ representa el cuadrado de $a+b$: $(a+b)^3$ su cubo: $(d^2-b)^4$ la quarta potencia de d^2-b.... $(d^2-b)^m$ su potencia m.

117 Las potencias de $a+b$ que acabamos de sacar por la regla general nos pueden servir para falicitar esta práctica, que es bastante molesta especialmente en las cantidades de muchos términos. Con efecto, el cuadrado de qualquiera cantidad algébrica ó numérica, monomia ó polinomia, con quebrados ó sin ellos, debe constar de los mismos términos que el de la cantidad general $a+b$, que puede representarlas todas. Consideremos pues, este binomio dividido en dos partes, a primera y b segunda, y verémos que su cuadrado $a^2+2ab+b^2$ se compone de a² *cuadrado de la primera parte*, 2ab *duplo de la primera a multiplicado por la segunda* b, *y de* b² *cuadrado de la segunda* b. Luego si dividimos qualquier cantidad $3bc+nt$ en dos partes, $3bc$ primera y nt segunda, tendremos su cuadra-

do $9b^2c^2+6bcnt+n^2t^2$, sin multiplicarla por sí, sacando el cuadrado de la 1.ª $3bc$ que es $9b^2c^2$; despues el duplo de la 1.ª $3bc$ multiplicado por la 2.ª nt que es $2\times 3bc\times nt=6bcnt$; y por último el cuadrado n^2t^2 de la 2.ª nt. Quando el signo de una de las partes es $+$ y el otro $-$, sale negativo el 2.º término del cuadrado: como se ve en el de $\frac{5a}{b}-r$, que es $\frac{25a^2}{b^2}-\frac{10ar}{b}+r^2$.

Para sacar el cuadrado del trimonio $cd+m-\frac{1}{2}$, se le divide en las dos partes $cd+m$ 1.ª y $-\frac{1}{2}$ 2.ª, y será su 1.er término $(cd+m)^2$, esto es $c^2d^2+2cdm+m^2$: el 2.º $2\times(cd+m)\times-\frac{1}{2}$, que se reduce á $-cd-m$: y el 3.º $(-\frac{1}{2})^2$, que es $\frac{1}{4}$: luego todo el cuadrado será $c^2d^2+2cdm+m^2-cd-m+\frac{1}{4}$. Con igual facilidad se saca el cuadrado de una cantidad que tenga quatro, cinco ó mas términos, dividiéndola en dos partes, de las que convendrá sea el último la 2.ª parte, y todos los demas 1.ª procediendo despues como se ha visto en el antecedente egemplo.

118 Luego si se nos pidiese la raiz cuadrada de $a^2+2ab+b^2$ cuadrado general, debiendo ser su 1.r término a^2, cuadrado de la 1.ª parte de la raiz, será esta a, raiz cuadrada de a^2. En el 2.º término $2ab$ que se presenta quitado el 1.º a^2, debe encontrarse

la 2.ª parte multiplicada por el duplo de la 1.ª: luego si dicho 2º término $2ab$ se parte por $2a$, duplo de la 1.ª parte a, el cociente b será la 2.ª parte de la raiz, con tal que haya ademas en la cantidad propuesta el cuadrado b^2 de esta 2.ª parte, como con efecto le hay: luego $a+b$ es la raiz que se pide.

Si se hubiese pedido la raiz de la cantidad $a^2+2ab^2+b^2+2ac+2bc+c^2$; sacada la raiz $a+b$ de $a^2+2ab+b^2$ que considerarémos como primer término del cuadrado, se dividirá el 2º $2ac+2bc$ por el duplo $2a+2b$ de la raiz hallada, y el cociente c es la 2.ª parte; pues se encuentra ademas el 3.r término c^2 cuadrado de c.

119 Luego en general, para extraer la raiz cuadrada de qualquier cantidad polinomia ordenada: 1º *se saca la raiz cuadrada de su primer término, se pone á parte y se resta su cuadrado de la cantidad.*

2º *Se divide el residuo por el duplo de la raiz hallada, que es la 1.ª parte, y el cociente será la 2.ª y se concluye restando de la cantidad el producto del divisor por el cociente y el cuadrado de dicho cociente.*

3º *Si sobra algo, se volverá á partir por el duplo de las dos partes halladas, que se toman por 1.ª, restando del dividendo el producto que resulte del cociente por el divisor, junto con el cuadrado de dicho cociente: y así*

se continúa si vuelve á sobrar.

Veanse practicadas estas reglas en el siguiente egemplo en donde para sacar la raiz

A... $x^4 - 2bx^3 + b^2x^2 - 2a^2x^2 + 2a^2bx + a^4$	$x^2 - bx - a^2$ *Raiz*
$-x^4$	$2x^2$ 1.er *Divi*
B.. $-2bx^3 + b^2x^2 - 2a^2x^2 + 2a^2bx + a^4$	$-bx$ *Cocient*
$+2bx^3 - b^2x^2$	
C.. $-2a^2x^2 + 2a^2bx + a^4$	$2x^2 - 2bx$ 2.º *Di*
$+2a^2x^2 - 2a^2bx - a^4$	$-a^2$ *Cociente*
0	

cuadrada de la cantidad A, se saca de su primer término x^4, y x^2 que resulta, será su 1.ª parte: que se pone á un lado y su cuadrado x^4 se resta de la cantidad. El residuo B se divide por $2x^2$ duplo de la 1.ª parte hallada, y $-bx$ que sale de cociente, es la 2.ª parte de la raiz. Multiplíquese este cociente por el divisor, y el producto $-2bx^3$ junto con el cuadrado b^2x^2 de dicho cociente se resta de la cantidad.

De la resta resulta el residuo C que se divide por $2x^2-2bx$, duplo de x^2-bx que se toma ahora por 1.ª parte: despues se multiplica el cociente $-a^2$ por el divisor, y se resta el producto $-2a^2x^2+2a^2bx$, añadido del cuadrado a^4 del mismo cociente, de la cantidad C: y pues que nada sobra, concluyo que x^2-bx-a^2 es la raiz cuadrada de la cantidad A. Si quiero certificarme de que es así,

subo esta raiz al cuadrado y me resultará dicha cantidad A.

120 Por estas mismas reglas se extrae la raiz en los números; pero es preciso tener bien sabidos los siguientes cuadrados de los números primeros.

Raices.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	&c.
Cuadr.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	100.	121.	144.	&c.

En ellos se ve 1º que ningun número cuya última cifra sea 2, 3, 7, 8 podrá ser cuadrado perfecto: lo 2º que el cuadrado de los números de una cifra ó que anteceden á 10, no puede llegar á 100, es decir, no puede pasar de dos cifras: los cuadrados de los que anteceden á 100, no pueden tener mas que quatro cifras... En general, ningun cuadrado puede tener mas cifras que el duplo de las que conste su raiz; aunque podrá tener ménos como se ve en 4, 169, 10201, cuadrados de 2, 13, 101. De consiguiente si comenzando por la derecha se divide el número cuadrado de dos en dos cifras, el número de divisiones será el de las cifras que ha de tener la raiz: la 1.ª division tiene una cifra quando es impar el número de las que hay en el cuadrado.

121 Todo constará de los egemplos: en los que se baja una division cada vez que se ha de partir, y no se cuenta en la parti-

cion con la última de los dos cifras, que se reserva para restar de ella el cuadrado de la 2.ª parte de la raiz: advirtiendo ademas, que quando el divisor no cabe en el dividendo, se pone cero en la raiz y se bajan las dos cifras que se siguen.

Egemplo I.

33,64	58 *Raiz*
25	
864	10 *Divisor*
80	8 *Cociente*
64	
64	
0	

Para sacar la raiz cuadrada del núm.º 3364 que dividiré de dos en dos notas, comenzando por la derecha; saco de la 1.ª division 33 la raiz cuadrada que es 5, contentándome con la próxima menor porque no la tiene exâcta: póngola á parte, y restando su cuadrado 25 de 33, me quedan 8 de residuo. Á 8 se junta la division inmediata 64, se toma de 864 que componen, el 86 por dividendo, y debiendo ser 10, duplo de la 1.ª parte hallada el divisor, saldrá de cociente 8. Multiplico por él el divisor, y resto el producto 80 del dividendo, y restando por último de 64 que quedan, el cuadrado 64 del cociente 8, me resultará cero, y será 58 la raiz cuadrada de 3364. En prueba de lo qual 58 subido al cuadrado produce $58 \times 58 = 3364$.

122. Hemos restado primero el producto 80 del divisor por el cociente, y despues su cuadrado 64, porque juntándolos no se confundiese su valor, que por el diverso lugar que deben ocupar, no compone la suma 80+64=144 sino 864. Pero para abreviar la operacion, convendrá siempre juntar el cociente al divisor, y sacar de una vez los dos productos; pues multiplicando 8 por 8 saldrá su cuadrado, y 8 por 10 dará el producto del cociente por el divisor.

33,64	58
25	
864	108
864	8
0	

En el 2º egemplo, sacada de 8 la raiz; restado su cuadrado 4 de 8, y bajada la division 45; se partirá 44 entre 4 duplo de 2; se juntará al divisor el 9 que sale de cociente, y multiplicando por él 49 que componen,

Egemplo II.

8,45,64,64	2908 *Raiz*
4	
44,5	49 1.r *Divisor*
441	9
0046,46,4	5808 2º *Divisor*
46464	8
00000	

se restará el producto 441 de 445. Puesto

el 9 en la raiz, se junta la segunda division 64 al residuo 4, y como en el dividendo 46 no cabe el divisor 58, duplo de 29 raiz hallada; se pondrá cero en la raiz, y se bajará la última division 64. Divídase 4646 entre 580, duplo de 290 que se toma por 1.ª parte: júntese el cociente 8 al divisor 580, y multiplicando 5808 por 8, y restando su producto de 46464; se tendrá cero de residuo, y será 2908 raiz cuadrada de 8456464. En efecto, 2908×2908=8456464.

123 Si concluida la operacion con los dos últimos guarismos, resulta algun residuo, es prueba de que el número propuesto es cuadrado imperfecto, y de consiguiente no tiene raiz exâcta. Para sacarla tan próxîma como se quiera; se añaden dos ceros á la resta y á las demas que vayan resultando, y serán decimales las cifras que salgan de la operacion, que es la misma en cada dos ceros que en cada dos de los números anteriores.

Despues de haber encontrado en el 3.^r egemplo 5424 raiz próxîma del número propuesto, añadiré dos ceros á 208 que sobran, y duplicando á 5424, tendré 10848 por 4.º divisor: el dividendo correspondiente es 20800, el cociente cero, que debe ser la primera de las notas decimales. Añado á 20800 otros dos ceros, y tendré que dividir 2080000 entre

108480: pongo en la raiz el cociente 1, 2.ª nota decimal; júntolo al divisor, y hecha la multiplicacion y resta, añadiré al residuo 995199 otros dos ceros: dividido despues 9951990 por el duplo de la raiz hallada, y poniendo en el 3r lugar de decimales el cociente 9, continuaré si es menester, la operacion que no tiene fin.

Egemplo III.

29,41,99,84	*Raiz* |5424,019
25	
441	|104 1.r *Divisor*
416	4
2599	|1082 2º
2164	2
43584	|10844 3º
43376	4
2080,00,0	|1084801 4º y 5º
108480 1	1
9951990,0	|10848029 6º
9763226 1	9
188763 9 &c.	

124 Quando el numerador y denominador de un quebrado son cuadrados perfectos, se saca de dichos términos la raiz, y se tie-

ne la del quebrado. Sacando la raiz cuadrada 4 de 16, y la de 49 que es 7, se tendrá la de $\frac{16}{49}$ que es $\frac{4}{7}$: la de $\frac{9}{25}$ es $\frac{3}{5}$; la de $\frac{a^2}{b^2}$ es $\frac{a}{b}$; la de $\frac{c^4}{4b^6}$ es $\frac{c^2}{2b^3}$; y la de $\frac{25a^2b^6}{81c^2d^4}$ es $\frac{5ab^3}{9cd^2}$.

125 En los números, si solo el denominador es cuadrado perfecto, como sucede en $\frac{3}{9}$, se saca en decimales la raiz próxîma 1,732 del numerador 3 por las reglas precedentes, y dividiéndola por 3 raiz exâcta del denominador, se tendrá $\frac{1,732}{3}=0,577$, raiz próxîma del quebrado. Para hacer que el denominador sea cuadrado perfecto si no lo es, se multiplican los dos términos del quebrado por dicho denominador. Si se pide la raiz próxîma de $\frac{5}{6}$, le reduciré ántes á $\frac{5\text{x}6}{6\text{x}6}$ ó $\frac{30}{36}$, sacaré despues la raiz próxîma de 30 que es 5,477, la dividiré por 6, raiz exâcta de 36, y tendré 0,913 raiz próxîma de $\frac{5}{6}$.

126 Si se pidiese la raiz cuadrada de un entero y un quebrado, $5\frac{1}{4}$ por egemplo; se convertirá en $\frac{21}{4}$, y se sacará despues dicha raiz como acabamos de decir. Pero será mejor reducir $5\frac{1}{4}$ á la cantidad decimal 5,250000, á la que se han añadido quatro ceros para sacar por las reglas dadas su raiz próxîma 2,291 con tres cifras decimales.

127 Vengamos ya á la potencia cúbica,

cuya formacion se ha de facilitar por medio del cubo de $a+b$; $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, que se compone del cubo a^3 de la 1.ª parte a, de $3a^2b$ triplo del cuadrado de la 1.ª parte multiplicado por la 2.ª, de $3ab^2$ triplo de la 1.ª parte multiplicado por el cuadrado de la 2.ª y de b^3 cubo de la 2.ª Con efecto, si dado el binomio $3bc+nt$ para elevarle al cubo, considero á $3bc$ como 1.ª parte, y á nt como 2.ª; deberá ser el primer término $27b^3c^3$, cubo de $3bc$: el 2º $27b^2c^2\times nt = 27b^2c^2nt$, triplo del cuadrado de $3bc$ que es $27b^2c^2$, multiplicado por la 2.ª parte nt: el 3.º $9bcn^2t^2$, triplo de la 1.ª $9bc$ multiplicado por n^2t^2 cuadrado de la 2.ª: y el 4.º n^3t^3 cubo de la 2.ª: y la potencia cúbica de $3bc+nt$ será $27b^3c^3+27b^2c^2nt+9bcn^2t^2+n^3t^3$

Para sacar el cubo del trinomio $cd+m-\frac{1}{2}$, se toma á $cd+m$ por 1.ª parte, y á $-\frac{1}{2}$ por 2.ª: y procediendo como en el egemplo anterior, se tendrá $(cd+m-\frac{1}{2})^3=(cd+m)^3+3\times(c^2d^2+2cdm+m^2)\times-\frac{1}{2}+3\times(cd+m)\times\frac{1}{4}+(-\frac{1}{2})^3$, que viene á ser, efectuando las operaciones indicadas, $c^3d^3+3c^2d^2m+3cdm^2+m^3-\frac{3c^2d^2}{2}-3cdm-\frac{3m^2}{2}+\frac{3cd}{4}+\frac{3m}{4}-\frac{1}{8}$.

Quando la cantidad tiene mas términos, se toma siempre el último por 2.ª parte y los demas por 1.ª, y se procede del mismo modo.

128 Luego si se pidiese la raiz cúbica, del cubo general $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; sacaria de su primer término a^3 cubo de la 1.ª parte, la raiz cúbica a, y esta seria la 1.ª parte de la raiz pedida. La 2.ª que es b, debo encontrarla en el 2º término $3a^2b$, dividiéndole por $3a^2$ triplo del cuadrado de la 1.ª a encontrada. Y como ademas de estos términos se encuentran $3ab^2$ triplo de la 1.ª multiplicado por el cuadrado de la 2.ª, y b^3 cubo de esta 2.ª, que son todos los que debe tener un cubo completo; concluyo que el dado lo es, y su raiz cúbica $a+b$.

Si se hubiese dado el cubo $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a^2+2ab+b^2)\times c+3(a+b)\times c^2+c^3$ para extraer su raiz cúbica; sacada como acabamos de decir la de $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ que es $a+b$, tomaré este binomio por 1.ª parte, y dividiendo por $3(a^2+2ab+b^2)$ triplo de su cuadrado, los términos siguientes tendré c de cociente y 2.ª parte de la raiz; pues se encuentran despues de los términos divididos, $3(a+b)c^2$ triplo de la 1.ª multiplicado por el cuadrado de la 2.ª y c^3 cubo de la 2.ª

129 Por consiguiente, para extraer la raiz cúbica de qualquier cantidad polinomia ordenada: 1º *se saca la raiz cúbica de su primer término que será la 1.ª parte, se escribe á un lado, y se resta su cubo de dicho primer término.*

2º *Se divide el residuo por el triplo del cuadrado de la* 1.ª *parte hallada, y el cociente será la segunda.*

3º *Se multiplica el cociente por el divisor, y el producto sumado con el triplo de la* 1.ª *parte multiplicado por el cuadrado de la* 2.ª, *y con el cubo de esta* 2.ª *se restan de la cantidad.*

4º *Si sobra algo, se vuelve á partir por el triplo del cuadrado de lo que haya en la raiz, que se toma por* 1.ª *parte, y el cociente es la nueva* 2.ª *parte; réstense de la cantidad los tres productos que digimos en la regla* 3.ª *y continuese del mismo modo si aun volviese á sobrar, y se tendrá la raiz que se busca.*

Egemplo.

A. $a^6+6a^5d+21a^4d^2+44a^3d^3+63a^2d^4+54ad^5+27d^6$

$-a^6$ | $a^2+2ad+3d^2$ *Raiz*

B...... $6a^5d+21a^4d^2+44a^3d^3+63a^2d^4+54ad^5+27d^6$

C..... $6a^5d-12a^4d^2-8a^3d^3$ | $3a^4$ *Divis.*

$2ad$ *Cociente*

D....... $9a^4d^2+36a^3d^3+63a^2d^4+54ad^5+27d^6$

2.º *Divis.* | $3a^4+12a^3d+12a^2d^2$

$3d^2$ *Cociente*

$-9a^4d^2-36a^3d^3-63a^2d^4-54ad^5-27d^6$

0

Para sacar la raiz cúbica de la cantidad A, sacaré la de su 1.er término a^6 que es a^2;

póngola á parte, y resto su cubo a^6 de la cantidad. Divido el residuo B por $3a^4$, triplo del del cuadrado de la 1.ª parte hallada a^2, y tendré de cociente $2ad$: multiplícole por el divisor, y añadiendo al producto $6a^5d$, el triplo de la 1.ª a^2 multiplicado por el cuadrado de la 2.ª $4a^2d^2$, que es $3 \times a^2 \times 4a^2d^2 = 12a^4d^2$, y $8a^3d^3$ cubo de la 2.ª $2ad$, lo restaré de B; y tendré de residuo D. Este se ha de dividir por $3a^4 + 12a^3d + 12a^2d^2$ triplo de $a^4 + 4a^3d + 4a^2d^2$ cuadrado de $a^2 + 2ad$ que se toma por 1.ª parte: el cociente es $3d^2$; con que tendré que restar, por último, de D los tres productos $9a^4d^2 + 36a^3d^3 + 36a^2d^4$ del divisor por el cociente, $27a^2d^4 + 54ad^5$ triplo de la 1.ª $a^2 + 2ad$ multiplicado por $9d^4$ cuadrado de la 2.ª $3d^2$, y $27d^6$ cubo de la 2.ª; y como nada sobrá; será $a^2 + 2ad + 3d^2$ raiz cúbica de la cantidad A. Para cuya prueba subiré dicha raiz al cubo y me saldrá A.

130 Para la extracion de esta raiz en los números, observense los cubos de los números primeros que son..

Raiz.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	&c.
Cubos.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512	729	1000	1331	1728.	&c

y se verá que los cubos de los números de una cifra, que son los que anteceden á 10; han de ser menores que su cubo 1000, es de-

cir, que no pueden llegar á quatro cifras: asimismo los cubos de los de dos cifras, ó de los que anteceden á 100, que han de ser menores que su cubo 1000000, no pueden llegar á siete cifras; y en general, que ningun número puede tener en su cubo mas que el triplo del número de cifras de que conste su raiz. Y por consigüiente, si se divide un cubo comenzando por la derecha de tres en tres cifras, el número de divisiones será el de las cifras que debe haber en su raiz: bien que la primera division de la izquierda podrá tener una ó dos; porque no todos los números tienen por cubo el triplo de las cifras de que constan, como se ve en 8 cubo de 2, y en 27 y 64 cubos de 3 y 4.

131 En lo demas, las reglas de la extraccion de la raiz cúbica son unas mismas para los números y para las letras, en observando lo 1º que para cada division se baja una clase de tres números, de los que se reservan dos para restar de ellos los dos productos que se añaden al del divisor por el cociente: advirtiendo que este se escribe bajo del dividendo, el segundo termina en la segunda cifra de la division, y el tercero en la tercera: 2º que en la division no se cuenta con las dos últimas cifras: 3º que quando el divisor no cabe en el dividendo, se pone cero en la raiz y se baja otra clase.

Egemplo I.

	32,768	32 *Raiz.*
	27	
	57,68	27 *Div.*
Producto del divis.r por el coc.te	54	2 *Coc.*
Triplo de la 1.a p.te por el cuad.do de la 2.a	36	
Cubo de la 2.a	8	
	5768	
	0	

Dividase el número 32768 como se ve en el egemplo, para extraer de él la raiz cúbica: se saca la de 32 que por no tenerla exâcta, se toma su próxîma menor 3, y restando su cubo 27 de 32, quedan 5 que con 768 que se le juntan, son 5768. De aquí se toma por dividendo á 57, y como el divisor debe ser 27, triplo de 9 cuadrado de la 1.ª parte; será 2 el cociente, y 2.ª parte de la raiz. Sumo ahora los productos $2\times27=54$ del divisor por el cociente, $3\times3\times4$ triplo de la 1.ª 3 por el cuadrado de la 2.ª 2; y 8 cubo de la 2.ª dispuestos como se dijo (131) y se ve en el egemplo: y restando su suma de 5768; tendré cero, y de consiguiente será 32 la raiz cúbica de 32768.

Egemplo II.

```
68,067,239,787    4083 Raiz.
64
   40,672,39     |4800 1º y 2º Divisor
   38400          8 Cociente
    7680
     512
   3917312
      1499277,87 | 499392 4º Divisor
      1498176      3 Cociente
        11016
           27
     1499277787
          0
```

En el 2º egemplo sacada la raiz cúbica 4 de 68, y restado su cubo 64 de 68, se juntan al residuo 4 los tres números 067: y porque en el dividendo 40 no cabe el divisor 48, triplo del cuadrado de la 1.ª parte 4, se pone cero en la raiz, y bajada la division siguiente 239, se parte 40672 por 4800, triplo del cuadrado de 40. Sacado el cociente 8, se resta de 4067239,3917312 suma de los tres productos 38400 del divisor por el cociente, 7680 triplo de la 1.ª por el cuadrado de la 2.ª y 512 cubo de la 2.ª Añadiendo al residuo 149927 la última division

787 y partiendo 1499277 por 409392 triplo del cuadrado de 408, se tendrá el último cociente 3, y cero de residuo, restando la suma de los tres productos acostumbrados que muestra el egemplo. Luego la raiz que se busca, es 4083: como se puede comprobar subiéndola al cubo.

132 En los cubos imperfectos en los quales sobra algo, despues de haber bajado la última clase, ya que no se pueda lograr exacta la raiz, se aproxima en decimales añadiendo á cada residuo tres ceros y continuando la extraccion por las mismas reglas.

Asi se egecuta en el 3.r egemplo en el que despues de haber encontrado la raiz 27, añadiré tres ceros á la resta 2107, y dividiendo 21070 por 2187 triplo del cuadrado de 27, tendré 9 por cociente y 1.a cifra de decimales: resto de 2107000 los tres productos 19683,6561,729 del divisor por el cociente, del triplo de la 1.a por el cuadrado de la 2.a, y del cubo de la 2.a: y añadiendo al residuo 72361 otros tres ceros, volveré á partir 723610 por el 3.r divisor. El cociente 3 es la 2.a cifra de decimales, con la que se practíca lo que con las demas, y se continúa si se quiere, la operacion.

Egemplo III.

21,790	27,93 *Raiz*
8	
137,90	12 1.r *Divisor*
84	7 *Cociente*
294	
343	
11683	
21070,00	2187 2.º *Divisor.*
19683	9 *Cociente*
6561	
729	
2034639	
723610,00	233523 3.r *Div.*
700569	3 *Cociente*
7533	
27	
70132257	
2228743 &c.	

133 La raiz cúbica se saca de los quebrados cuyos dos términos son cubos perfectos, extrayéndola de los dos. La de $\frac{8}{27}$ es $\frac{2}{3}$; por ser 2 la 8 y 3 la de 27: la de $\frac{64}{125}$ es $\frac{4}{5}$; la de $\frac{8a^3b^6}{216}$ es $\frac{2ab^2}{6}$. Quando en los números solo el denominador tiene raiz exâcta;

se saca la proxîma del numerador (132), y dividiéndola por la exâcta del denominador, resulta la del quebrado. En $\frac{3}{27}$ por egemplo, se saca la raiz cúbica próxîma del numerador 3 que es 1,443, y partiéndola por 3 raiz exâcta de 27, será la próxîma de $\frac{3}{27}$, $\frac{1,443}{3} = 0,481$. Para hacer al denominador cubo perfecto quando no lo es, se multiplican los dos términos del quebrado por el cuadrado del denominador: $\frac{2}{3}$ por egemplo, se reduce á $\frac{2x9}{3x9} = \frac{18}{27}$, cuyo denominador 27 es cubo perfecto.

134. Si se pidiese la raiz cúbica de un entero y quebrado, 6 $\frac{3}{8}$ por egemplo, se reducirá á $\frac{51}{8}$, y sacando la raiz próxîma de 51, y la exâcta de 8, será la de 6 $\frac{3}{8}$, $\frac{3,708}{2} = 1,854$. Pero es mas facil reducir 6 $\frac{3}{8}$ á la cantidad decimal 6,375000000, y sacar por las reglas dadas dicha raiz próxîma 1,857: cuidando de que la cantidad tenga siempre un número de cifras decimales triplo de las que se quieran en su raiz.

135 Muchas veces nos contentamos con indicar las raices imperfectas sean cuadradas, sean cúbicas, con el signo $\sqrt{}$. $\sqrt[2]{\frac{2}{5}}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{ad^2}}$ representan *la raiz cuadrada de* $\frac{2}{5}$, y *la cúbica*

de $\frac{a}{ad^2}$: en la cuadrada se suele omitir el 2:

136 Del mismo modo que en el cubo y el cuadrado se facilita la formacion de la potencia 4.ª con la de $a+b$ que es $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$; y que se compone de la 4.ª potencia de la 1.ª parte a, del quadruplo del cubo de la 1.ª multiplicado por la 2.ª b, del sestuplo del cuadrado de la 1.ª multiplicado por el cuadrado de la 2.ª, del quadruplo de la 1.ª multiplicado por el cubo de la 2.ª y de la 4.ª potencia de la 2.ª; dividiendo en dos partes la cantidad que se dé para elevarla á su 4.ª potencia, y poniendo sucesivamente los términos que acabamos de decir.

137 Igualmente sacarémos de dicha potencia general el modo de extraer la raiz 4.ª; pues sus términos manifiestan que la 1.ª parte a de la raiz debe ser la raiz 4.ª del 1.º a^4; como tambien que la 2.ª parte b, que se encuentra en el 2.º término $4a^3b$ multiplicada por el quadruplo del cubo de la 1.ª parte hallada a; se deberá buscar dividiendo por dicha cantidad $4a^3$, el residuo que quede de restar la 4.ª potencia de la 1.ª parte hallada. Y que deberán encontrarse en la cantidad para ser potencia 4.ª de $a+b$, $6a^2b^2$ sestuplo del cuadrado de la 1.ª multiplicado por el cuadrado de la 2.ª, $4ab^3$ quadruplo

de la 1.ª multiplicado por el cubo de la 2.ª y b^4 4.ª potencia de la 2.ª b. Últimamente, se prevendria en los números dividirlos de quatro en quatro notas, usar de una de estas divisiones en cada operacion, no contando con las tres últimas cifras para dividendo, poner cero quando este no contenga al divisor, y todo lo demas que dejamos advertido en la extraccion de la raiz cuadrada y cúbica.

138 Si se observan los términos de las potencias anteriores, se verá que el esponente de a en el 1.er término es el que indica el grado de la potencia, y en los demas va disminuyendo de 1. El esponente de b es siempre 1 en el 2º término, y en los siguientes va creciendo de una unidad hasta llegar en el último al grado de la potencia; de suerte que los términos de la potencia 6.ª no contando con los coeficientes son $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$. Advirtiendo que quando una de las partes b es negativa, son negativos los términos impares en que se encuentra b, b^3, b^5 &c.

En quanto á los coeficientes, el del 1º es siempre 1, el del 2º es el 1.er esponente de a dividido por el 1º de b: el del 3.º el producto de los dos primeros esponentes de a dividido por el producto de los dos primeros esponentes de b: el del 4.º el producto de los

tres primeros esponentes de a dividido por el producto de los tres primeros de b; y asi de los demas. Los de dicha potencia sesta por eg. serán 1, $\frac{6}{1}$, $\frac{6\times5}{1\times2}$, $\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}$, $\frac{6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4}$, $\frac{6\times5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4\times5}$. $\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4\times5\times6} = 1$: y toda la potencia con letras y coeficientes será $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

139 Finalmente, si se nos pidiese una potencia general, v. gr. la potencia m de $a+b$, serian sus términos sin coeficientes $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4$ &c. hasta el infinito: Y los coeficientes solos $\frac{m}{1}$, $\frac{m\times m-1}{1\times2}$, $\frac{m\times m-1\times m-2}{1\times2\times3}$, $\frac{m\times m-1\times m-2\times m-3}{1\times2\times3\times4}$ &c. y toda la potencia m de $a+b$ ó $(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m\times m-1}{1\times2}a^{m-2}b^2 + \frac{m\times m-1\times m-2}{1\times2\times3}a^{m-3}b^3 +$ &c. Y como $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$, $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$ &c. se podrá mudar en esta $a^m + \frac{ma^m b}{1\times a} + \frac{m\times m-1\,a^m b^2}{1\times2\times a^2} + \frac{m\times m-1\times m-2\,a^m b^3}{1\times2\times3a^3} +$ &c.

140 Por medio de esta fórmula que inventó el inmortal Newton, y de cuya cons-

truccion tratarémos adelante ; es muy fácil elevar una cantidad á qualquiera potencia dividiéndola en dos partes que se igualan á a y b, suponiendo m la potencia que se pide, y poniendo en lugar de los términos de la fórmula los valores que les corresponden.

141 Pero su principal utilidad está en la facilidad con que se sacan por ella las raices próxîmas de las potencias imperfectas de que pondrémos algun otro egemplo en enseñando á manejar las cantidades radicales, que suelen intervenir en dichos cálculos.

Cálculo de las cantidades Radicales.

142 Quando una cantidad se ha transformado segun dejamos dichos (114) en otra igual que no tiene el signo $\sqrt{}$, se puede sumar, restar, multiplicar, partir, subir á sus potencias y extraer de ella qualquier raiz por las mismas reglas que hemos dado para las cantidades algébricas.

Y asi $\sqrt{a}$ y $\sqrt[3]{a^2}$ transformados en $a^{\frac{1}{2}}$ y $a^{\frac{2}{3}}$, suman $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{2}{3}}$: se diferencian en $a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{2}}$: su producto es $a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$ sumando sus esponentes (85): su cociente es $a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}}$ restando los esponentes (92): su quadra-

do $a^{\frac{1}{2}\times 2} = a^{\frac{2}{2}} = a$, y $a^{\frac{2}{3}\times 2} = a^{\frac{4}{3}}$; y su raiz cúbica $a^{\frac{1}{2\times 3}} = a^{\frac{1}{6}}$, y $a^{\frac{2}{3\times 3}} = a^{\frac{2}{9}}$. La suma de $b^{\frac{t}{n}}$ y $b^{\frac{r}{m}}$ es $b^{\frac{t}{n}} + b^{\frac{r}{m}}$, su diferencia $b^{\frac{t}{n}} - b^{\frac{r}{m}}$, su producto $b^{\frac{t}{n}+\frac{r}{m}} = b^{\frac{tm+nr}{nm}}$, su cociente $b^{\frac{tm-nr}{nm}}$: su potencia h, $b^{\frac{th}{n}}$ y $b^{\frac{rh}{m}}$, y su raiz q, $b^{\frac{t}{nq}}$ y $b^{\frac{r}{mq}}$.

Tambien $a^{\frac{2}{5}} + b^{-\frac{3}{4}}$ es la suma de $a^{\frac{2}{5}}$ y $b^{-\frac{3}{4}}$: $a^{\frac{2}{5}} - b^{-\frac{3}{4}}$ su diferencia: $a^{\frac{2}{5}} b^{-\frac{3}{4}} = \frac{a^{\frac{2}{5}}}{b^{\frac{3}{4}}}$ su producto: y $\frac{a^{\frac{2}{5}}}{b^{-\frac{3}{4}}} = a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{3}{4}}$ su cociente: su potencia p, $a^{\frac{2p}{5}}$, $b^{\frac{-3p}{4}}$; y su raiz q, $a^{\frac{2}{5q}}$ $b^{\frac{-3}{4q}}$.

143 Como los términos que forman el esponente quebrado de estas cantidades son los esponentes del radical y de las cantidades; siempre que estos puedan dividirse por un mismo número, quedará mas sencilla la cantidad radical. $\sqrt[4]{b^2}$ por eg. que es $b^{\frac{2}{4}} =$

$b^{\frac{1}{2}}$, equivale á $\sqrt{b}$, dividiendo 4 y 2 por 2: $\sqrt[6]{a^{15}} = a^{\frac{15}{6}} = a^{\frac{5}{2}} = \sqrt{a^5}$, dividiendo por 3. Y por lo mismo la raiz 4.ª de a^8 se podrá sacar extrayendo dos veces la cuadrada; por ser $\sqrt[4]{a^8} = \sqrt{a^4} = a^2$: la raiz 6.ª de b^{12} sacando la cúbica y despues la cuadrada; pues $\sqrt[6]{b^{12}} = \sqrt[2]{b^4} = b^2$. En general, la extraccion de qualquier raiz se podrá dividir en las operaciones de raices inferiores que indiquen los factores de sus esponentes. La 8.ª por eg. sacando tres veces la cuadrada, ó primero la 4.ª y despues la cuadrada; por ser $8 = 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2$.

144 Asimismo, siempre que de alguno de los factores de la cantidad radical pueda extraerse la raiz; se la podrá poner antes del signo $\sqrt{}$ á manera de coeficiente, y como tal multiplicará toda la cantidad sin haber variado su valor, y haciéndola mas sencilla. Con efecto, la cantidad $\sqrt[3]{a^3b^6c} = \sqrt[3]{c \times a^3b^6}$, sacando del factor a^3b^6 la raiz cúbica ab^2, se reducirá á $ab^2\sqrt[3]{c}$; porque $\sqrt[3]{a^3b^6c} = a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{6}{3}}c^{\frac{1}{3}} = ab^2\sqrt[3]{c}$.

Si en $\sqrt{(m^3n + 8m^2n^2 + 16mn^3)}$ descompongo la cantidad en los dos factores $(m^2 + 8mn + 16n^2) \times mn$ y saco la raiz cuadrada del 1.º que es $m + 4n$, y la pongo por coefi-

ciente al radical, quedará reducido á $(m+4n)$ $\sqrt{mn}$: (por coeficiente de un radical entendemos aqui toda la cantidad que le multiplica).

$2\sqrt{\left(\frac{27a^2b^5x^2-45a^2b^4t}{4}\right)}$ que se descompone en

$2\sqrt{(3bx^2-5t)\frac{9a^2b^4}{4}}$, equivale sacando de $\frac{9a^2b^4}{4}$ la raiz $\frac{3ab^2}{2}$, y multiplicándola por el coeficiente 2, á $3ab^2\sqrt{(3bx^2-5t)}$.

145 De consiguiente quando se quiera meter bajo del signo $\sqrt{}$ alguna cantidad que le anteceda como coeficiente, se deberá subir antes á la potencia que indique el radical, y multiplicar por ella despues las cantidades que haya bajo de dicho signo, ó partirlas si estaba dividiendo.

Para meter bajo del signo radical $3a$ en $3a\sqrt{bc}$, le subiré á su cuadrado $9a^2$, y multiplicándole por bc, tendré $3a\sqrt{bc}=\sqrt{9a^2bc}$.

$\frac{3}{c}\sqrt[3]{\left(\frac{c-n}{d+3}\right)}$ es lo mismo que $\sqrt[3]{\left(\frac{27c-27n}{c^3d+3c^3}\right)}$, multiplicando $\frac{c-n}{d+3}$ por $\frac{27}{c^3}$: últimamente, ..

$\frac{2}{c-d}\sqrt{(a-2d)}$ equivale á $\sqrt{\left(\frac{4a-8d}{c^2-2cd+d^2}\right)}$.

146 Luego un radical $a\sqrt[n]{\frac{b}{c}}$ podrá multiplicarse ó partirse por una cantidad qual-

quiera m asi, $am\sqrt[n]{\frac{b}{cm^n}}$ sin variar de valor; pues $a\sqrt[n]{\frac{b}{c}}=\frac{am}{m}\sqrt[n]{\frac{b}{c}}=am\sqrt[n]{\frac{b}{cm^n}}$: y nos podremos valer de este medio para reducir á entero qualquier quebrado que esté antes ó dentro de un radical: por eg. $b\sqrt[n]{\frac{a}{c}}=b\sqrt[n]{ac^{-1}}=$ $b\sqrt[n]{ac^{-1}\times\frac{c^n}{c^n}}=b\sqrt[n]{\frac{ac^{n-1}}{c^n}}=\frac{b}{c}\sqrt[n]{ac^{n-1}}$.

147 Si se transforman las cantidades generales $\sqrt[m]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ de diferentes esponentes en sus iguales $a^{\frac{1}{m}}$ y $b^{\frac{1}{n}}$, ó en $a^{\frac{n}{mn}}$ y $b^{\frac{m}{mn}}$ reduciendo los quebrados á un mismo denominador; se tendrá, volviendolas al radical, $\sqrt[mn]{a^n}$, $\sqrt[mn]{b^m}$ que tienen ya un mismo esponente mn. „Luego para reducir dos radicales „á un mismo esponente, se han de multipli„car los esponentes entre sí, y subir despues „la cantidad de cada radical al esponente que „indique el otro.‟

Para reducir $\sqrt[2]{8}$ y $\sqrt[3]{5}$ á un mismo esponente; se multiplican 2 por 3, se sube el 8 al cubo, y el 5 al cuadrado, y resultan $\sqrt[2\times3]{8^3}$, $\sqrt[2\times3]{5^2}$, esto es, $\sqrt[6]{512}$ y $\sqrt[6]{25}$. $\sqrt[4]{\frac{6ab}{c}}$

y $\sqrt[5]{\frac{2bt}{3a}}$ se reducen á $\sqrt[4\times5]{\left(\frac{6ab}{c}\right)^5}$ y $\sqrt[4\times5]{\left(\frac{2ba}{3a}\right)^4}$ ó $\sqrt[20]{\frac{7776a^5b^5}{c^5}}$ y $\sqrt[20]{\frac{16b^4a^4}{81a^4}}$ Ultimamente $\sqrt[2]{\left(\frac{c-d}{4}\right)}$ y $\sqrt[3]{\left(\frac{2+d}{a-n}\right)}$ hechos de un mismo esponente, son $\sqrt[2\times3]{\left(\frac{c-d}{4}\right)^3}$ y $\sqrt[2\times3]{\left(\frac{2+d}{a-n}\right)^2}$ ó $\sqrt[6]{\left(\frac{c^3-3c^2d+3cd^2-d^3}{64}\right)}$ y $\sqrt[6]{\left(\frac{4+4d+d^2}{a^2-2an+n^2}\right)}$

Quando haya tres ó mas radicales que reducir, se multiplican entre sí todos los esponentes, y se eleva la cantidad de cada radical á la potencia indicada por el producto de los esponentes de los otros: $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{\frac{bc}{2}}$ y $\sqrt[4]{\frac{x^2c}{m}}$ se reducen á $\sqrt[2\times12]{(ab)^{12}}$, $\sqrt[3\times8]{\left(\frac{bc}{2}\right)^8}$, $\sqrt[4\times6]{\left(\frac{x^2c}{m}\right)^6}$, que son $\sqrt[24]{a^{12}b^{12}}$ $\sqrt[24]{\frac{b^8c^8}{256}}$ y $\sqrt[24]{\frac{x^{12}c^6}{m^6}}$.

148 Esto supuesto, las cantidades radicales se suman »escribiendolas con sus propios signos; y se restan mudando en sus »contrarios los signos del subtrahendo, reduciendo las que haya semejantes, es decir, las de un mismo esponente, y de una misma cantidad bajo del signo $\sqrt{}$.«

La suma de $\sqrt{(c-d)}$ y $\sqrt[3]{\frac{6b^5}{5}}$, es $\sqrt{(c-d)} + \sqrt[3]{\frac{6b^5}{5}}$; y su diferencia $\sqrt{(c-d)} - \sqrt[3]{\frac{6b^5}{5}}$: la suma de $5b\sqrt[5]{(x+a)}$ y $-4\sqrt[5]{bc^2}$, es $5b\sqrt[5]{(x+a)} - 4\sqrt[5]{bc^2}$, y su diferencia $5b\sqrt[5]{(x+a)} + 4\sqrt[5]{bc^2}$: la suma de $5bc^2\sqrt[3]{8}$, y $6bc^2\sqrt[3]{8}$ es reduciendo, $11bc^2\sqrt[3]{8}$: la de $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$ y $\frac{3}{5}\sqrt[3]{4}$ es reduciendo tambien, $\frac{19}{15}\sqrt[3]{4}$: haciendo la misma reduccion se hallará que la diferencia de $\frac{a}{2}\sqrt[4]{(a+b)}$ y $\frac{2}{b}\sqrt[4]{(a+b)}$ es $\frac{ab-4}{2b}\sqrt[4]{(a+b)}$. Ultimamente, la suma de $7c\sqrt{a}$ y $\sqrt{36ac^2} = 6c\sqrt{a}$ (144), es $13c\sqrt{a}$: y la diferencia de $\sqrt[3]{(a^4+2a^3b)}$ y $\sqrt[3]{(8ab^3+16b^4)}$ que se reducen á $a\sqrt[3]{(a+2b)}$ y $2b\sqrt[3]{(a+2b)}$ es, restando sus coeficientes, $(a-2b)\sqrt[3]{(a+2b)}$.

149 »Para multiplicar los radicales se »hacen de un mismo esponente si no lo son, »y se multiplican las cantidades que estan »antes y bajo del signo $\sqrt{}$. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ se multiplica por $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{a}{3}}$ reduciéndolos á $\frac{2}{3}\sqrt[6]{27}$ y $\frac{3}{4}\sqrt[6]{\frac{a^2}{9}}$

de un mismo esponente, y multiplicando despues $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{2}$ y 27 por $\frac{a^2}{9}$; de que resulta $\frac{2}{6}\sqrt[6]{\frac{27a^2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt[6]{3a^2}$. El produto de........ $5\sqrt{(c+d)}$ por $6a\sqrt{(c+d)}$ es $30a\sqrt{(c+d)^2} = 30a(c+d)$: y generalmente el de $n\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ por $\frac{c}{d}\sqrt[m]{\frac{t}{z}}$ es $\frac{cn}{d}\sqrt[m]{\frac{at}{bz}}$. El producto de $\frac{3cd^2}{4}$ cantidad racional, por $\sqrt[3]{\left(\frac{b}{3}-d\right)}$, es..... $\frac{3cd^2}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{b}{3}-d\right)}$.

150 »Tambien se parten haciéndolos de »un mismo esponente y dividiendo despues »las cantidades que están antes y bajo del »signo $\sqrt{}$.« De suerte que el cociente de $\frac{3}{4}\sqrt{b}$ partido por $7a\sqrt[4]{\frac{c}{d}}$ ó de $\frac{3}{4}\sqrt[8]{b^4}$ y $7a\sqrt[8]{\frac{c^2}{d^2}}$ es, dividiendo $\frac{3}{4}$ por $7a$, y b^4 por $\frac{c^2}{d^2}$, $\frac{3}{28a}\sqrt[8]{\frac{b^4d^2}{c^2}} = \frac{3}{28a}\sqrt[4]{\frac{b^2d}{c}}$. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{3(c+d)}$ partido por $\frac{a^2}{4}\sqrt[3]{\frac{2-c}{3}}$, da $\frac{8}{3a^2}\sqrt[3]{\left(\frac{9c+9d}{2-c}\right)}$. Un radical $2c\sqrt{(t-2)}$ se divide por una cantidad racional $7b^2-n$ escribiéndolas asi $\frac{2c\sqrt{(t-2)}}{7b^2-n}$:

y si el denominador se quiere meter bajo del radical se egecuta segun lo dejamos enseñado (145): $\sqrt{(c^2x^2-c^2b^2)}$ partido por $x-b$ es $\frac{\sqrt{(c^2x^2-c^2b^2)}}{x-b} = \frac{c\sqrt{(x^2-b^2)}}{x-b} =$

$$c\sqrt{\left(\frac{(x^2-b^2)}{(x-b)^2}\right)} = c\sqrt{\left(\frac{(x+b)(x-b)}{(x-b)^2}\right)} = c\sqrt{\left(\frac{x+b}{x-b}\right)}.$$

151 »Los radicales se suben á las po»tencias, subiendo primero sus coeficientes y »dividiendo despues sus esponentes por los »de las potencias quando dan cociente exàc»to; pues sino, es mejor subir á dichas po»tencias las cantidades que están bajo del »signo $\sqrt{}$.« El cuadrado de $\sqrt[4]{2a}$ es $\sqrt[\frac{4}{2}]{2a} = \sqrt{2a}$: el cubo de $2\sqrt[6]{\left(\frac{a-3}{2}\right)}$ es $8\sqrt[2]{\left(\frac{a-3}{2}\right)}$: pero la potencia n de $c\sqrt[3]{ab^2}$, en lugar de escribirla asi, $c^n\sqrt[\frac{3}{n}]{ab^2}$ se representa mejor asi, $c^n\sqrt[3]{a^n b^{2n}}$.

152 »Para extraer las raices de dichas »cantidades se multiplican sus esponentes por »los de las raices, despues de haberlas sacàdo »de los coeficientes que las tengan exâctas, »y haber metido bajo del radical los que no.

La raiz cuadrada de $9\sqrt{bc}$ es $3\sqrt[2\times 2]{bc}=3\sqrt[4]{bc}$: la cúbica de $\frac{2}{5}\sqrt{(t-a)}$ que se reduce á $\sqrt{\frac{4(t-a)}{25}}$ por no tener $\frac{2}{5}$ raiz cúbica, es $\sqrt[2\times 3]{\frac{4(t-a)}{25}}=\sqrt[6]{\frac{4(t-a)}{25}}$: y en general la raiz n de $\sqrt{\frac{a}{b}}$ es $\sqrt[2n]{\frac{a}{b}}$

153 El que quiera razon de las reglas que acabamos de dar, transforme las cantidades radicales en sus iguales con esponentes quebrados, y la encontrará al instante. Y adviertase que observando dichas reglas y el metodo que se ha seguido con las cantidades polinomias será facil calcular qualesquiera expresiones que consten de dos ó mas términos radicales.

154 Volviendo yá á la fórmula de Newton $a^n+ma^{m-1}b+\frac{m\times m-1}{1\times 2}a^{m-2}b^2+$ &c. Supongamos su 1.^r^ término $a^m=A$, será el 2.º $ma^{m-1}b=\frac{ma^m b}{a}=\frac{mAb}{a}$; si este se llama B, será el 3.º $\frac{m\times m-1\, a^{m-2}b^2}{1\times 2}=\frac{m\times m-1\, a^m b^2}{1\times 2 a^2}=\frac{(m-1)Bb}{2a}$: llamando á este C, será el 4.º

$$\frac{m\times m-1\times m-2a^{m-3}b^3}{1\times 2\times 3}=\frac{m\times m-1\times m-2a^m b^3}{1\times 2\times 3\times a^3}=$$

$\frac{(m-2)Cb}{1\times 2\times 3\times a}$: y continuando de esta manera quedará la fórmula reducida á esta, mucho mas sencilla, $a^m+\frac{mAb}{a}+\frac{(m-1)Bb}{2a}+\frac{(m-2)Cb}{3a}+\frac{(m-3)Db}{4a}+\frac{(m-4)Eb}{5a}$ &c. en la que cada término se forma del anterior multiplicado por $\frac{b}{a}$ y por uno de los coeficientes m, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$ &c.

Consideremos ahora que extraer la raiz cuadrada de una cantidad, es subirla á la potencia $\frac{1}{2}$, extraer la raiz cúbica, subirla á la potencia $\frac{1}{3}$; y extraer la raiz n subirla á la potencia $\frac{1}{n}$: de consiguiente si para sacar el valor $\sqrt{(b^2+c^2)}$, ó de $(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}$, supongo $b^2=a$, $c^2=b$, y $\frac{1}{2}=m$; y substituyo estos valores en la fórmula, tendré $a^m=(b^2)^{\frac{1}{2}}=b^{\frac{2}{2}}=b$: $\frac{mAb}{a}=\frac{1}{2}\times b\times\frac{c^2}{b^2}=\frac{c^2}{2b}$: $\frac{(m-1)Bb}{2a}=-\frac{1}{4}\times\frac{c^2}{2b}\times\frac{c^2}{b^2}=-\frac{c^4}{8b^3}$: y haciendo igual substitucion en

los demas términos, resultará $\sqrt{(b^2+c^2)}=(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}=b+\frac{c^2}{2b}-\frac{c^4}{8b^3}+\frac{c^6}{16b^5}-\frac{5c^8}{128b^7}+\frac{7c^{10}}{256b^9}-$ &c. Del mismo modo se hallará $\sqrt{(b^2-c^2)}=(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}=b-\frac{c^2}{2b}-\frac{c^4}{8b^3}$ &c. Con igual facilidad se encontrará el valor $\sqrt[3]{(b^2\pm c^2)}$, $\sqrt[4]{(b^2\pm c^2)}$ &c. y se aplicará á la extraccion de la raiz cúbica, quarta &c. próxîma de qualquier cantidad, del modo que vamos á aplicar el valor de $\sqrt{(b^2+c^2)}$ á sacar la raiz cuadrada próxîma de 6.

Divídase en dos partes 4 y 2, de las quales la 1.ª ha de ser cuadrado perfecto, pongase en la expresion $b+\frac{c^2}{2b}-\frac{c^4}{8b^3}+$ &c. 4 en lugar de b^2, y 2 en lugar de c^2 y se tendrá $\sqrt{(b^2+c^2)}=\sqrt{(4+2)}=\sqrt{6}=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\frac{5}{1024}+$&c. Los dos primeros términos 2 y $\frac{1}{2}$ componen $\frac{5}{2}$, cuyo cuadrado $\frac{25}{4}$ escede á 6 en $\frac{1}{4}$: luego si se supone $\frac{25}{4}=b^2$. y $c^2=-\frac{1}{4}$ se tendrá substituyendo estos valores en la fórmula, $\sqrt{(b^2-c^2)}=\sqrt{(\frac{25}{4}-\frac{1}{4})}=\sqrt{6}=\frac{5}{2}-\frac{1}{20}=\frac{49}{20}$, valor muy próxîmo de $\sqrt{6}$ y que se puede aproxîmar aun mas. Haciendo $8=9-1$, y suponiendo $b^2=9$, $c^2=1$; se tendrá la raiz de 8, calculando los tres primeros términos, $\frac{611}{216}=3-\frac{37}{216}$ que es bastante próxîma.

Cantidades imaginarias.

155 Digimos (113) que era imposible ó *imaginaria* la raiz par de una cantidad negativa $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt{-ab^4}$.... porque toda raiz positiva ó negativa produce positivas todas sus potencias pares, $a \times a = a^2$; $-a \times -a = a^2$; $b \times b \times b \times b = b^4$, y $-b \times -b \times -b \times -b = b^4$. Estas que son verdaderas cantidades, pues $-a^2$ nace de $a \times -a$, $-b^4$ de $b^2 \times -b^2$; ocurren con frecuencia en los cálculos para manifestar quando es imposible una cosa; y se calculan por las mismas reglas que acabamos de dar. Pero por quanto pueden ocurrir algunas dudas quando se multiplican ó parten, añadirémos aqui algunos egemplos. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ es $\sqrt{(-a \times -a)} = \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = -a$; que es de quien aqui se formó a^2. Y notese que $(-a)^2$ cuadrado de $-a$, es diferente de $-a^2 = a \times -a$. $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c} = -\sqrt{bc}$: porque $\sqrt{-b}$ es lo mismo que $\sqrt{b} \times \sqrt{-1}$, y $\sqrt{-c}$ lo mismo que $\sqrt{c} \times \sqrt{-1}$: luego $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c}$ será $\sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$, ó $\sqrt{bc} \times \sqrt{(-1)^2}$ que es $\sqrt{bc}$. Por la misma razon $\sqrt{-b}$ partido por $\sqrt{-c}$ ó $\sqrt{b} \times \sqrt{-1}$ partido por $\sqrt{c} \times \sqrt{-1}$, es $\sqrt{\frac{-1 \times b}{-1 \times c}} = \sqrt{\frac{b}{c}}$.

Asi como la raiz cuadrada de a puede ser $\sqrt{a}$ ó $-\sqrt{a}$: pues $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$,

y $-\sqrt{a} \times -\sqrt{a} = -\sqrt{a^2} = -a$; asi tambien $\sqrt{-a}$ y $-\sqrt{-a}$ son raices cuadradas de $-a$; pues $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = +\sqrt{(-a)^2} = -a$, y $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = +\sqrt{(-a)^2} = + -a = -a$ (78).
Como $\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = -\sqrt{(-a)^2} = --a = +a$; será el producto de las cantidades imaginarias una cantidad real si se multiplican en número par, y tienen bajo del signo $\sqrt{}$ una misma cantidad. Esto sucede tambien quando se multiplican dos binomios que tengan una misma cantidad imaginaria con signos contrarios, como $(a-\sqrt{-b}) \times (a+\sqrt{-b})$ que es $aa+a\sqrt{-b}-a\sqrt{-b}+b=a^2+b$.

Razones, Proporciones y Progresiones.

156 »La comparacion de una cantidad »qualquiera 8 con otra de la misma especie 12 »para ver lo que la una excede á la otra« se llama *razon aritmética*; la diferencia $12-8=4$ que resulta de esta comparacion, *esponente de la razon*; el 8 que se compara, *antecedente*; y el 12 á quien se compara *consecuente*. La razon aritmética de 7 á 15, que se escribe asi, 7. 15, es $15-7=8$, y la de b á d ó $b . d$, es $b-d$ ó $d-b$.

157 Como la diferencia sumada con el término menor debe componer el mayor, y restada del mayor ha de dar el menor; se tendrá en la razon 8 . 12, $8=12-4$, y en

7.15, $15=7+8$; luego en la razon general $a.b$, si el esponente es d, será $a=b+d$, si a es mayor que b, y $a=b-d$ si es menor. Será pues $a=b\pm d$: es decir, que *el antecedente de qualquier razon aritmética, es igual al consecuente mas ó menos la diferencia.*

158 Las razones serán mayores, menores ó iguales segun que sean mayores, menores ó iguales sus esponentes : y como no se muda la diferencia de dos cantidades por que se añada ó quite á ambas una misma cantidad ; tampoco variará el valor de las razones aritméticas por que se añada ó quite al antecedente y consecuente una misma cantidad. La razon de 5.9 es la misma que la de $5+3.9+3$; $5-3.9-3$; porque todas tienen el mismo esponente 4: y en general $a.b$ tiene la misma razon que $a\pm m.\ b\pm m$, cuyo esponente es en ambos casos $a-b$.

159 Quando comparamos dos razones aritméticas iguales 3.7, 5.9 diciendo de 3 á 7 hay la misma diferencia que de 5 á 9, ó 3 *es aritméticamente á* 7 *como* 5 *á* 9; formamos una *proporcion aritmética*, que se escribe asi, 3.7 : 5.9; $a.b:c.d$ quiere decir *a es á b aritméticamente como c á d.* El 1º y 4º términos de la proporcion se llaman *extremos*, y el 2º y 3º *medios*. Las proporciones en las que los medios son iguales como 3.5:5.7, $a.b:b.c$ se llaman *continuas*, y se escriben asi,

$\div 3.5.7$, $\div a.b.c$; el término repetido se llama *medio aritmético proporcional.*

160 En toda proporcion aritmética *la suma de los términos extremos es siempre igual á la de los medios*: y aunque es facil verificarlo en qualquiera proporcion como en $3.7:5.9$, donde $3+9=7+5=12$; lo demostrarémos generalmente en la proporcion general $a.b:c.d$. Suponiendo que el esponente de sus dos razones sea m, será (157) $a=b\mp m$, y $c=d\mp m$; pongamos ahora en la proporcion en lugar de a y c sus iguales $b\mp m$, $d\mp m$ y se convertirá en esta $b\mp m.b:d\mp m.d$, en la que la suma de los extremos y la de los medios es $b\mp m+d$.

161 Luego 1º en la proporcion continua será la suma de los extremos igual al duplo del término medio, esto es, en $\div 3.5.7$; $3+7=2\times 5$: y en $\div a.b.c$, $a+c=2b$: *y el término medio de una proporcion aritmetica continua será la mitad de la suma de los extremos*, ó $5=\frac{3+7}{2}$, y $b=\frac{a+c}{2}$. De consiguiente si dadas dos cantidades 6, 14 se me pidiese un medio aritmético para formar con las tres una proporcion continua; sumaria 6 y 14; y 10 mitad de la suma 20, será el medio, y la proporcion $\div 6.10.14$.

162 2º Si dados tres términos de una proporcion aritmética, se pide el otro; »si

»es uno de los extremos, se restará de la »suma de los medios el otro extremo, y si »es uno de los medios, restando el otro de »la suma de los extremos, saldrá el término »que se busca.« Si dados 3. 7:8.... se nos pidiese el 4º, restarémos de 7+8=15 el 1º 3, y la diferencia 12 completará la proporcion que será 3.7:8.12: el 2º 7 se hubiera sacado restando de 3+12=15, el 3º 8.

163 Una serie de razones aritméticas continuas 3.5:5.7:7. 9 : 9. 11 : 11. 13. &c., ó abreviando ÷3.5.7.9.11. 13.&c. forma una *progresion aritmética*, que es »una serie de »términos que restados cada uno del inmediato dan una misma diferencia.« Los que median entre el 1º y el último se llaman *medios proporcionales aritméticos*. Quando hay que añadir sucesivamente la diferencia á cada término para sacar el siguiente; los términos aumentan, y la progresion se llama *crescente*, como ÷3.3+2. 5+2. 7+2. &c. Si la diferencia se ha de restar de cada término para formar el siguiente, menguan, y se llama *decrescente*: como en ÷ 20. 20−3. 17−3. 14−3 &c. Como con solo invertir los términos se puede la decrescente hacer crescente, hablarémos de esta solamente.

164 Tendremos pues, que llamando a el 1.r término de una progresion aritmética y d la diferencia, será el 2º término $a+d$

el 3º $a+2d$, el 4º $a+3d$.... y el último siendo n el número de ellos, $a+(n-1)d$: y será ÷a. $a+d$. $a+2d$. $a+3d$. $a+4d$... $a+(n-1)d$, una progresion aritmética general. En ella se ve que el 2º término es el 1º y la diferencia, el 3º el 1º y dos diferencias, el 4º el 1º y tres diferencias, y qualquier término será el 1º y tantas diferencias como términos le anteceden. Luego de una progresion cuyo 1.r término es 3 y la diferencia 2, se podrá sacar el término 10.mo tomando el primero 3 y nueve diferencias; esto es, $3+2\times9=21$: el término 20.mo será $3+19\times2=41$.

165 Si del último término de una progresion quitamos el 1.º y el residuo que son las diferencias, lo dividimos por el número de las que hay, es decir, por el número de términos de la progresion menos uno; saldrá de cociente la diferencia de los términos. Asi se ve en $a+(n-1)d$ último término de la progresion general, donde restando a y dividiendo $(n-1)d$ por $n-1$, resulta la diferencia d.

166 Luego si dadas dos cantidades 2 y 32, se me pidiesen cinco medios aritméticos para formar con ellos una progresion aritmética de siete términos: restaria del último término 32 el primero 2, y dividiendo el resi-

duo 30 por 6, número de términos de la progresion menos uno, ó número de medios que se piden mas uno; me saldria la diferencia 5, que añadida al 1.r término 2, al 2.o y á los demas, me dará los cinco medios 2+5, 7+5, 12+5, 17+5, 22+5; que juntos á 2 y 32 componen la progresion ÷ 2. 7. 12. 17. 22. 27. 32.

»En general, para hallar un número »qualquiera de medios aritméticos entre dos »cantidades dadas; se resta la menor de la »mayor, y se divide el residuo por el nú»mero de medios mas uno: el cociente es la »diferencia de los términos, que añadida al »2.o da el 3.o añadida á este da el 4.o y así »de los demas.« Para interpolar entre 3 y 7 seis medios aritméticos; divido la diferencia 4 entre 3 y 7, por 7, número de medios mas uno, y añadiendo el cociente $\frac{4}{7}$, que es la diferencia de la progresion, á 3, y sucesivamente á los demas; tendré los seis medios $3\frac{4}{7}$, $4\frac{1}{7}$, $4\frac{5}{7}$, $5\frac{2}{7}$, $5\frac{6}{7}$, $6\frac{3}{7}$, y la progresion ÷ 3 . $3\frac{4}{7}$. $4\frac{1}{7}$. $4\frac{5}{7}$. $5\frac{2}{7}$. $5\frac{6}{7}$. $6\frac{3}{7}$. 7.

167 Si tomamos una progresion aritmética de qualquier número de términos v. gr. de siete, el 1.o y el 7.o componen dos primeros y seis diferencias, y de lo mismo constan el 2.o y 6.o, el 3.o y 5.o y el duplo del 4.o como se ve en la progresion general ÷ a. $a+d$. $a+2d$. $a+3d$. $a+4d$. $a+5d$. $a+6d$, donde

cada dos términos de los dichos suman $2a+6d$. »Luego en toda progresion aritmética la su»ma de los términos extremos es igual á la de »cada dos términos igualmente distantes de los »extremos, ó al duplo del término medio si el »número de términos es impar.“ Con efecto, en la progresion ÷3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17... cada dos de dichos términos suman 20.

168 De aquí se infiere que todos los términos de esta progresion sumarán quatro veces 20 que son 80: y generalmente que *la suma de todos los términos de una progresion aritmética será la suma de los extremos multiplicada por la mitad del número de términos*. Para sumar los 99 términos de la progresion ÷ 1.2.3.4.5.... hasta 99 de los números naturales; sumaré 1 y 99, y multiplicando 100 por $\frac{99}{2}$, mitad del número de términos; tendré $\frac{9900}{2}=4950$, suma que se busca.

El número de campanadas que da el relox en 12 horas, ó la suma de la progresion ÷ 1.2.3...12, es $(1+12)\times\frac{12}{2}=78$. El número de pasos que daria el que cogiese cien naranjas colocadas la 1ª á un paso de un cesto, y las otras un paso cada una de las demas, habiéndolas de echar una á una en el cesto; esto es, la suma de la progresion ÷2.4 hasta 200, sería $(200+2)\times\frac{100}{2}=10100$ pasos.

169 Hablemos ya de la *razon geométrica*

en la que »se compara una cantidad qualquie»ra 3 que es el *antecedente*, con un *consecuen»te* 12 para ver las veces que la una cabe en »la otra: « el cociente $\frac{12}{3}=4$, es el *esponente de la razon* de 3 á 12 que se escribe así, 3:12; $a:b$ representa la razon geométrica de a á b, cuyo esponente es $\frac{b}{a}$. En qualquiera de ellas el esponente ó cociente multiplicado por el antecedente que es el divisor, debe producir el consecuente que es el dividendo (22): en la razon 3:12, $3\times4=12$; y si suponemos que el esponente $\frac{a}{b}$ de la razon $a:b$ es q, será $aq=b$, y $a:b$ será lo mismo que $a:aq$.

170 Las razones se valúan por sus esponentes; de suerte que siendo estos iguales, lo serán las razones: y no variando de valor un cociente por que se multipliquen ó partan el dividendo y divisor por una misma cantidad (29); tampoco se *variara el valor de una razon geométrica porque se multipliquen ó partan su antecedente y consequente por una misma cantidad.* Y así será una misma la razon de 6: 18 que la de $6\times2:18\times2$, y que la de $\frac{6}{2}:\frac{18}{2}$, que tienen todas por esponente á 3. Generalmente, $a:b$, $a\times m:b\times m$, $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}$ son tres razones iguales que tienen un mismo esponente $\frac{b}{a}$.

171 La razon se llama *dupla* quando el antecedente cabe dos veces en el consecuente, como la de 2:4; $3a:6a$: *tripla*, quando cabe tres veces, como la de $a.3a$: *cuadrupla*, quando cabe quatro veces: y entonces las razones de 4:2, $6a:3a$ se llaman *subduplas*, la de $3a:a$ *subtripla*, &c.: á la de 2:3 llaman *sesquiáltera*. *Razon irracional* es aquella cuyo valor no puede ser espresado en números enteros ó quebrados, como la de $\sqrt{2}:\sqrt{3}$: qualquier otra es *racional*, y aun muchas de las que contienen inconmensurables, como la de $2\sqrt{6}$: $3\sqrt{6}$ cuyo esponente es $\frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}=\frac{3}{2}$.

172 El producto de dos ó mas razones, multiplicando entre sí los antecedentes y consecuentes, se llama *razon compuesta*: 2×5: 3×7, ó 10 : 21 es compuesta de las dos 2:3, 5:7: $amt:bcd$ se compone de las tres $a:b$, $m:c$, $t:d$. Si las razones componentes son iguales y son dos, la compuesta que resulta, se llama *duplicada* como 4 : 9, producto de las dos iguales 2:3, 2:3; 3:12 que se compone de las dos iguales 1:2, 3:6. La compuesta de tres razones iguales se llama *triplicada* como 48:162, compuesta de las tres iguales 2:3, 4:6, 6:9 &c. Al contrario; las razones componentes están en razon *subduplicada*, *subtriplicada*.... de sus productos. Como la ra-

zon de los cuadrados $a^2:b^2$ se compone de las dos $a:b$, $a:b$ de sus raices, la de los cubos $a^3:b^3$ de las tres $a:b$, $a:b$, $a:b$; estarán los cuadrados en razon duplicada, los cubos triplicada...., de sus raices; y estas en razon subduplicada, subtriplicada de sus cuadrados y cubos.

173 »La comparacion de dos razones »iguales geométricas 2:3,6:9 por eg. forma una *proporcion geométrica*, que se escribe así, 2:3::6:9, y quiere decir, la misma razon geométrica hay de 2 á 3 que de 6 á 9, ó 2 *es á 3 geométricamente como* 6 *á* 9; $a:b::c:d$ se lee así, *a es b geométricamente como* c *á* d. Tambien se llama *continua* la proporcion geométrica que tiene los términos medios iguales, como 2:6::6 : 18; $a:b::b:d$ que se escriben así ÷ 2:6:18,...÷$a:b:d$; y el término repetido 6 y *b* se llama *medio proporcional geométrico.*

174 *En toda proporcion geométrica es el producto de los términos extremos igual al producto de los medios.* Esta utilísima propiedad que se puede probar en qualquiera proporcion númerica 2:3::6:9, donde $2\times9 = 3\times6 = 18$; se demuestra generalmente en la proporcion $a:b::c:d$, suponiendo que sea q el esponente de las dos razones $a:b$, $c:d$, en cuyo caso será (169) $b = aq$, y $d = cq$; ponganse aq y cq en la proporcion en lugar de c y d, y

se convertirá en esta $a:aq::c:cq$, donde el producto de extremos y medios es acq.

175 En la proporcion continua es el producto de los extremos igual al cuadrado del término medio. En $\div 2:4:8$ se tiene $2\times8 = (4)^2 = 16$; y en $\div a:b:c$, $b^2 = a\times c$: de consiguiente, si se saca la raiz de estas dos cantidades iguales resultará $b = \sqrt{a\times c}$: es decir, *el término medio de una proporcion geométrica es igual á la raiz cuadrada del producto de los extremos.*

176 Como cada proporcion geométrica da dos productos iguales; tambien de dos productos iguales, se podrá formar una proporcion geométrica. Si de la proporcion $a:b::c:d$ sacamos $ad = bc$ (174), tambien de $ad = bc$ sacarémos $a:b::c:d$; pero se deben disponer los factores de suerte que los del un producto formen los extremos, y los del otro los medios de la proporcion. Si se tuviese por eg. $3ab = am^2$; será $3a:a::m^2:b$, ó $3b:m::am:a$... donde el producto de extremos y medios es $3ab = am^2$. De $mn - an = bd - d$ ó $(m-a)n = (b-1)d$, se saca $m-a:b-1::d:n$. En $1-a^2 = b^2d$ ó $(1-a)(1+a) = b^2d$ se tiene $1-a:b^2d::1:1+a$: y últimamente, $a^2-b^2 = 1$ da la proporcion $\div a+b:1:a-b$.

177 Aquí se ve que pueden variar de sitio los términos de una proporcion, sin dejar de ser proporcionales. Si $a:b::c:d$; tam-

bien será $a:c::b:d$, lo que se llama comparar *alternando*: ó *invirtiendo*, $b:a::d:c$; ó *componiendo*, $a+b:b::c+d:d$, $a:a+b::c:c+d$; ó *dividiendo*, $a:a-b::c:c-d$, $a-b:b::c-d:d$; ó *componiendo* y *dividiendo*, $a+b:a-b::c+d:c-d$ &c. En todas estas y otras proporciones que se pueden formar, el producto de extremos y medios se reduce á $ad=bc$.

178 Si se multiplican ó parten los términos correspondientes de dos ó mas proporciones, los productos ó cocientes serán tambien proporcionales. Si $a:b::c:d$ y $m:n::t:r$, será $am:bn::ct:dr$, y $\frac{a}{m}:\frac{b}{n}::\frac{c}{t}:\frac{d}{r}$: porque siendo en las dos proporciones el producto de extremos y medios igual; será $ad=bc$ y $mr=nt$: luego serán tambien $admr=bcnt$, y $\frac{ad}{mr}=\frac{bc}{nt}$; y como estos son los productos de extremos y medios de $am:bn::ct:dr$, $\frac{a}{m}:\frac{b}{n}::\frac{c}{t}:\frac{d}{r}$, serán proporcionales sus términos (176).

179 Multiplicadas dos proporciones iguales á $a:b::c:d$, darian de producto sus cuadrados $a^2:b^2::c^2:d^2$; tres, sus cubos $a^3:b^3::c^3:d^3$ &c, luego si quatro cantidades son proporcionales, lo serán tambien sus cuadrados, cubos y demas potencias, y lo mismo sus raices; de suerte que si $a:b::c:d$ será generalmente

$a^m : b^m :: c^m : d^m$: y $a^{\frac{1}{m}} : b^{\frac{1}{m}} :: c^{\frac{1}{m}} : d^{\frac{1}{m}}$ ó $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$.

180 »En qualquier número de razones »iguales geométricas $a:b$, $c:d$, $e:f$, $g:h$ &c. »estan siempre en proporcion la suma de to-»dos los antecedentes á la de los consecuen-»tes como un antecedente á su consecuente, »ó como qualquier número de antecedentes »á igual número de consecuentes.« Siendo las razones iguales, deberán tener un mismo esponente: llamemosle q, y será (169), $b=aq$, $d=cq$, $f=eq$, $h=gq$, y las razones se mudarán en estas $a:aq$, $c:cq$, $e:eq$, $g:gq$. En las que se tiene $a+c+e+g:aq+cq+eq+gq::a:aq::a+c:aq+cq::a+c+e:aq+cq+eq$: pues todas estas razones tienen un mismo esponente q.

181 Si se comparan los oficiales de una obra con los jornales que ganan, diciendo, si tres oficiales ganan 40 rs. 6 oficiales ganarán 80 rs. la proporcion 3 *Of*: 6 *Of*:: 40 *rs*:80 *rs*. en la que el 1.^r^ término es al 2º como el 3º al 4º, se llama *directa*; pues al paso que sea mayor ó menor el número de oficiales, será mayor ó menor el de los reales: lo qual se llama *ir de mas á mas, ó de ménos á menos.*

182 Pero si se compara el número de oficiales con el de los dias que emplean en

hacer una obra, así, si 3 oficiales gastan 80 dias en hacer una obra, 6 oficiales tardarán en ella 40 dias; la proporcion 3 *Of* : 6 *Of*:: 80 *d* : 40 *d*, se llama *indirecta*, *inversa* ó *recíproca*; porque mientras mas oficiales hay, ménos dias tardarán; es decir, que va *de mas á ménos* ó *de ménos á mas*; y hay que mudar de sitio á uno de los términos para que la proporcion 3:6::40:80 quede directa. Dicese pues, que los jornales estan en razon directa de los obreros, y estos en razon inversa de los dias.

183 Si se multiplican ó parten los términos de una proporcion geométrica por qualquier cantidad 2,3,4.... *m*, resultan productos, ó cocientes proporcionales; pues ni la multiplicacion ni la division altera el valor de las razones (170): si fuese pues $a:b::c:d$; será $2a:2b::2c:2d$; $3a:3b::3c:3d$...... $ma:mb:$

$$mc:md\;;\;\frac{a}{2}:\frac{b}{2}::\frac{c}{2}:\frac{d}{2}\;;\;\frac{a}{3}:\frac{b}{3}::\frac{c}{3}:\frac{d}{3}\;,\;\frac{a}{m}:\frac{b}{m}::\frac{c}{m}:\frac{d}{m}$$

y qualesquiera cantidades estarán en la misma razon que sus duplos, triplos, quádruplos &c. y en la misma que sus mitades, tercios, quartos &c.

184 De esta última proposicion se infiere que *dos quebrados* $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$ *de un mismo denominador están en la misma razon que sus nu-*

meradores; pues dividiendo por m los términos de la razon $a:b$, resulta $a:b::\frac{a}{m}:\frac{b}{m}$ Pero si los quebrados tuviesen un mismo numerador, *estarán en razon inversa de los denominadores*; es decir, que el 1.r quebrado es al 2º como el 2º denominador es al 1.º, ó $\frac{a}{m}:\frac{a}{n}::n:m$. Porque la razon $\frac{a}{m}:\frac{a}{n}$ es la misma que $\frac{an}{mn}:\frac{am}{mn}$ reduciéndola á un mismo denominador; esta es como la de sus numeradores $an:am$, y esta como $n:m$, dividiendo por a ambos términos.

185 Si dados los tres términos de una proporcion geométrica 2:9::4.... se me pidiese el 4.º; consideraré el producto de los medios 9×4 ó 36 como si fuese el de los extremos (174), y dividiéndole por 2 que es uno de ellos, tendré el otro $\frac{36}{2}=18$ que completa la proporcion 2:9::4:18. Para encontrar el 2.º dados los demas 2..::4:18; se toma el producto 2×18 de los extremos, como si fuese el de los medios, y dividiéndolo por el un medio 4, dará el otro $\frac{36}{4}=9$ que se busca. En general »el producto de los extremos de una »proporcion dividido por el un medio, y el pro»ducto de los medios dividido por uno de »los extremos debe dar el otro ~~extremo~~ término.«

Usos de las proporciones geométricas.

Reglas de Tres simple, de Tara, de Seguro, dé Avería, de Trueque, de Ganancia ó pérdida.

186 Este método de encontrár qualquiera de los términos de una proporcion geométrica conocidos los otros tres, tiene un uso universal en todos los ramos de matemáticas, y proporciona la solucion de infinidad de questiones curiosas, utiles y necesarias en el trato y comercio de la Sociedad. De ellas vamos á tratar, enseñando la práctica de las que se llaman *Reglas de tres*, y de las demas que á ellas se reducen, por medio de algunos exemplos: en los que para hacer mas sencilla su solucion, los reduciremos todos á encontrar el 4.º término de la proporcion dividiendo el producto del 2.º y 3.º por el 1.º

Egemp. 1.º *Un navio que ha caminado con igual viento 875 leguas en 6 dias ¿quántas caminará en 4 dias con las mismas circunstancias?* Como en ménos dias se caminan ménos leguas, irá la proporcion de ménos á ménos, y será directa: luego sus términos conocidos se colocarán asi, 6 *d*: 4 *d*:: 875 *leg*.... y el 4.º se encontrará multiplicando los medios 4×875, y dividiendo el producto 3500

por el 1.º 6: de que resulta $\frac{4 \times 875}{6} = \frac{3500}{6} = 583\frac{1}{3}$; número de leguas que se busca.

2.º *Si 36 V. de tapia 2. P. y 3. p. cuestan 60 dob. 2 rs. y 4 mrs. ¿quánto costarán 48. V. 1. P. y 4 p.* Como á proporcion de las varas aumenta su importe; será la proporcion directa, y los términos reduciéndolos á su menor especie, serán 1323 *p.*: 1744 *p.*: : 122472 *mrs.*..... donde multiplicando el 2.º por el 3.º y partiendo el producto 213591168 por el 1.º será el 4.º término reducido, 79 *dob.* 8 *rs.* y 12 $\frac{756}{1323}$ *mrs.*

3.º *¿En quántos dias abrirán 20 hombres un foso, que 16 hombres abrieron en 8 dias?* Mas hombres han de tardar ménos dias; con que la proporcion será indirecta, y asi en lugar de poner 16 *homb.*: 20 *h.*: : 8 *dias*.... pondrémos (182) 20 *h*: 16 *h*: : 8 *d*.. multiplico 16 por 8, y parto el producto 128 por 20, y tendré 6 *dias*, 9 *hor.* y 36′.

4.º *Presta A á B 100 dob. por 6 meses con condicion de hacer otro tanto B con A; pero llegando el caso, B no puede darle mas que 75 dob. se pregunta quánto mas tiempo podrá retenerlos para compensar con la tardanza lo que falta de la cantidad.* Mientras ménos doblones le dió, mas tiempo puede tardar en volverselos; luego la proporcion es indirecta, y debe colocarse asi, 75 : 100 : : 6.. donde mul-

tiplicando 100 por 6, y dividiendo el producto por 75, resultan 8 meses.

5.º *En una plaza cercada que espera socorro á los 30 dias, hay solo víveres para 20 dias; y se pregunta á qué se debe reducir la racion de cada dia.* Si representamos por 1 la racion que se da á cada uno al dia; será la proporcion 20 *d* : 30 *d* : : 1.... y como la racion debe ser tanto menor quantos mas dias haya que esperar; será indirecta, y se trocará en esta 30*d* : 20 *d* : : 1... donde resultan $\frac{20 \times 1}{30} = \frac{2}{3}$, á que se debe reducir la racion.

187 6.º *Un Mercader que compra 16 cajones de azucar que pesan 4000 lib. ¿quántas ha de pagar en limpio rebajando el 12 por 100 por el peso de los cajones?* En este caso de la regla de *Tara* se hace 100+12:100::4000: al 4.º término, que es $3571\frac{48}{112}$ *peso* neto que debe pagar. En la de *Seguro* para averiguar lo que deberia pagar á quien se obligase á responder de los peligros del trasporte de dicha azúcar por un 12 por 100; se diria 100: 12::4000:480. Al contrario, si los generos valuados en 4000 *pe.* hubieran padecido *avería* regulada en 12 por 100; se hubiera hecho tambien 100 : 12:: 4000 : 480 *pe.* cuya cantidad se deberia descontar de los 4000 *pe.*

188 7.º *Si una vara de paño vale en dinero 80 rs. y trocado por terciopelo 88 rs.;*

el terciopelo que vale á 96 rs. , á quánto debe subir en el trueque ? Para resolver esta pregunta de la regla que llaman de *Barata* ó *Trueque* , haré la proporcion 80 : 88: : 96: $\frac{96 \times 88}{80}$, y tendré 105 *rs.* y $20\frac{3}{5}$ *mrs.* valor del terciopelo trocado.

8.º *La libra de chocolate vale en dinero 8 rs. y en trueque 8½; ¿ á quánto ha de subir el café que vale al contado 16 rs. , pagándose la 4.ª parte en dinero ?* Rebajada la 4.ª parte de los dos precios 8½ y 8 , quedan 6 *rs.* 12 *mrs.* y 6 *rs.* despues de lo qual diré , si 6 *rs.* montan á 6 *rs.* 12 *mrs.* , 16 *rs.* á quánto subirán ? saco el 4.º término , y tendré 16 *rs.* y 32 *mrs.*

Ganancias

9.º *Uno vendió en 3615 pe. un género que le habia costado 2500 pe. ¿ quánto ganó por 100 ?* Resto 2500 de 3615 , y pues quedan 1115 ; diré , 2500 dió 1115 , 100 qué dará ? y sacaré por 4.º término 44 *pe.* y [illegible]9 [illegible]*rs.*

10. *Un género que vale á 8 rs. la libra ¿ á cómo se ha de vender para ganar 10 por 100 ?* Sumo 10 con 100 , y digo despues, 100 dan 110 , 8 qué dará ? y tendré 8 *rs.* y 27 *mrs.*

189 11.º *A compra á B en géneros , importe de 1000 rs. fiados por un año , y B le ofrece descontar un 10 por 100 , si se los*

paga de contado ; se pregunta quánto debe darle ?

En esta pregunta, que incluye la regla que llaman de *Descuento*, hay que buscar una cantidad que puesta á ganancias á 10 por 100, produzca en un año 1000. Digo pues, si 100+10 ó 110 vienen de 100, 1000 de quién vendrá? esto es, 110 : 100 :: 1000:...... $\frac{1000 \times 100}{110} = 909\frac{1}{11}$, número de reales que debe dar *A* á *B*. Si se hubiera dicho 100 quedan en 90, 1000 en quántos quedarán ? hubieran salido 900 ; pero como 900 puestos á ganancias á 10 por 100, solo produce 990 por la proporcion 100 : 110 :: 900 : 990; no es esto lo que se pide.

12.º *A un Mercader que debe* 1000 *rs. pagaderos dentro de un año, se le rebajan* 5 *por* 100 *pagando de contado ¿quánto deberá dar pagando á los* 4 *meses ?* Rebajándose 5 por 100 por adelantar la paga 1 año; se rebajará $3\frac{1}{3}$ por adelantarla 8 meses, haciendo 12 *meses* : 8 :: 5 : $3\frac{1}{3}$: con que si $103\frac{1}{3}$ vienen de 100, 1000 vendrá de $967\frac{23}{31}$ *rs.* que debe dar.

Regla de Tres compuesta, y Regla Conjunta.

190 Quando en la pregunta intervienen mas términos que los quatro, se llama *Com-*

puesta la regla de tres; y se reduce á simple formando una razon compuesta de la multiplicacion de todas las razones (178) ménos la del término incognito, despues de haber comparado con esta cada una de las demas para convertir en directas las que sean indirectas.

Eg. 1.º *Si 20 homb. hacen 160 v. de obra en 15 dias ¿30 homb. en 12 dias quántas harán?* Comparo la 1.ª razon, diciendo: si 20 *homb.* hacen 160 *v.* 30 *h.* harán mas, y la proporcion será directa: digo despues para comparar la razon de los dias, si en 15 *d.* se hacen 160 *v.* en 12 *d.* se harán ménos, y tambien será la proporcion directa: formo pues de las dos razones 20 *h*: 30 *h*, 15 *d*: 12 *d*. la compuesta 20×15:30×12 ó 300:360, considerando que el trabajo de 20 *h.* en 15 *d.* es el mismo que el de 1 *h.* en 300 *d.* y tendré la proporcion sencilla 300:360:: 160 *v.* á 192 *v.* que resultan de multiplicar 360 por 160 y dividir el producto por 300. Siempre que el 1º y 2.º términos de la proporcion puedan dividirse por un mismo número como en 300: 360 que son divisibles por 60, se debe hacer la division para que quede 5 : 6 mucho mas sencilla y del mismo valor (170).

2.º *Un jornalero trabajando 7 horas al dia gana en 40 dias 100 pesos ¿ quántos dias necesita para ganar 150, trabajando 10 horas cada dia?* Comparo las razones así: traba-

jando 7 horas al dia se necesitan 40 dias para cierta ganancia; trabajando 10 horas al dia se necesitarán ménos dias: luego la proporcion es indirecta, y en lugar de 7 *hor*: 10 *hor*. se deberá poner 10:7. La otra proporcion es directa; pues si se ganan 100 *pes.* en 40 *d.* 150 *pe.* se ganarán en mas *d.* Formo pues, la razon 100×10: 150×7 compuesta de 10:7 y 100: 150, y despues la proporcion 100×10: 150×7::40.... es decir, 1000:1050:: 40.... ó reduciendo la 1.ª razon, 20:21::40... ó últimamente 2:21::4:42, número de dias, que salen multiplicando 4 por 21 y dividiendo 84 por 2.

191 Á esta regla pertenece la que se llama *Conjunta*, por la que dados diferentes géneros con sus precios, ó diferentes medidas, monedas, pesos con sus valores, se averigua el de cierta porcion de qualquiera de ellos.

3.º *Seis libras de azucar valen 7 lib. de miel, 5 lib. de miel 4 v. de cinta, 10 v. de cinta 40 nueces de especia, y 7 nueces 10 rs. ¿quántos reales valdrán 3 lib. de azucar?* En lugar de las quatro proporciones siguientes

6 lib. az : 7 *lib. de miel* :: 3 *l. az* : $3\frac{1}{2}$ *miel*
5 *l. miel*: 4 *v. cint*:: $3\frac{1}{2}$ *miel*: $2\frac{4}{5}$ *v. cint.*
10 *v. cint*: 40 *nuec*:: $2\frac{4}{5}$ *v. cint*: $11\frac{1}{5}$ *nuec.*
7 *nuec*: 10 *rs.* :: $11\frac{1}{5}$ *nuec*: 16 *rs.*

por las que se averigua lo que se pide; formo de las quatro razones 6:7, 5:4, 10:40, y 7:10 la razon compuesta $6\times5\times10\times7:7\times4\times40\times10$, y despues la proporcion $6\times5\times10\times7:7\times4\times40\times10::$ 3 *lib*: $\frac{7\times4\times40\times10\times3}{6\times5\times10\times7}$, donde de una vez se encuentran 16 rs. valor de 3 lib. de azucar, quitando en el 4.º término para abreviar el cálculo, los factores comunes, 7 y 10.

4.º *Si 3 lib. tornesas de Francia valen 32 dineros esterlines de Inglaterra, 240 de estos dineros 408 dineros gros de Holanda, 50 de estos 190 mrs. ¿ quántos mrs. valdrán 60 libras tornesas ?* Formo la proporcion $3\times240\times50:32\times408\times190::60:\frac{32\times408\times190\times60}{3\times240\times50}$, y tendré $4134\frac{2}{5}$ mrs. á que equivalen las 60 lib. tornesas.

Regla de Compañías.

192 Por la regla de tres se divide tambien una cantidad en partes que tengan entre sí qualquier razon : y porque esta operacion se suele aplicar á repartir entre los que componen alguna Junta de Comercio, las pérdidas ó ganancias á proporcion de lo que cada uno ha puesto en el fondo ó Principal; se llama *Regla de Compañías*. Explicarémosla en los egemplos siguientes.

1.º *De tres que se juntan á comerciar,*

el 1.º pone 250 pes. el 2.º 300 y el 3.º 330: ganaron 20000 rs. y se quiere saber quanto toca á cada uno.

Cada asociado debe percibir á correspondencia de lo que puso; con que habrá que dividir el número 20000 en tres partes, que tengan la misma razon que los números 250, 300, 330. Para esto, sumados dichos números diré, 880 suma de lo que pusieron, es á 20000 que ganaron; como lo que cada uno puso á lo que ganó, que viene á ser la proporcion demostrada ya (180). Hago pues, las reglas de tres que aparecen, y me resultarán las tres ganancias, advirtiendo que en la operacion se reduce la razon 880:20000 á su igual y mas sencilla 11:250.

$$11:250::\begin{cases}250:\dfrac{250\times250}{11}=5681\tfrac{9}{11}\\[4pt]300:\dfrac{300\times250}{11}=6818\tfrac{2}{11}\\[4pt]330:\dfrac{330\times250}{11}=7500\end{cases}$$

Suma.................... 20000.

Si se divide 20000 por 880, se tendrán $22\frac{8}{11}$ por la ganancia que corresponde á un peso, y esta multiplicada sucesivamente por 250, 300, 330 dará mas brevemente la de cada comerciante, fundándose en la regla de tres 1 *pe.* da $22\frac{8}{11}$, 250 *pe.* darán &c.

2. *Dos hicieron compañía por 6 años: el 1.º puso 150 dób. por el dicho tiempo, el 2.º puso 310, y al fin del año 3.º quitó 140;*

pero al comenzar el 6.º añadió 100. *Perdieron* 5000, *y se pregunta lo que toca á cada uno de pérdida.*

En estos casos en donde hay diferencia de tiempo, se multiplica lo que cada uno pone por el número de años que lo tiene puesto, y así queda reducido el caso al anterior. Con efecto, los 150 *dob.* que el 1.º tuvo ganando todos los 6 años, equivalen á $150 \times 6 = 900$ *dob.* que se empleasen un año: y como el 2.º tuvo empleados 310 los tres primeros años, 170 los dos siguientes, y 270 el último año; sumaré 310×3, 170×2, y 270 y será 1540 la puesta del 2.º Divido despues 5000 por 2440 suma de $900 + 1540$, y el cociente $2\frac{3}{61}$ perdida de 1 *dob.* multiplicado por 900 y despues por 1540 dará para el 1.º $1844\frac{16}{61}$ de perdida, y para el 2.º $3155\frac{45}{61}$, que ambas componen 5000.

3.º *Se pide dividir un batallon de* 600 *hombres en tres partes tales, que la* 1.ª *sea á la* 2.ª *como* 2 : 3, *y la* 1.ª *á la* 3.ª *como* 4:5. Este caso tiene de particular que se piden tres partes y se dan quatro números, porque la 1.ª está expresada con los dos 2 y 4. Para reducirlos á uno, coloco las dos razones asi, $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{4}$; y reduciéndolas á un mismo denominador serán $\frac{12}{8}$, $\frac{10}{8}$ ó 8 : 12 y 8 : 10 de un mismo valor y con solos tres números 8, 10, 12 en cuya razon se han de dividir los 600 soldados.

Sumo pues 8, 10 y 12, divido 600 por la suma 30, y multiplicando el cociente 20 por 8, 10 y 12, tendré 160, 200 y 240 que son las partes que se piden.

Regla de Aligacion.

193 La regla de *Aligacion* enseña el modo de hallar el precio medio de qualesquiera cosas que se mezclan, ó la porcion que se ha de tomar de cada uno de los ingredientes que componen cierta mezcla. Vease su práctica en los egemplos siguientes.

1.° *Si se mezclasen 30 cántaros de vino de 19 rs. con 10 cántaros de á 23 rs. y se quisiese saber qué precio debe tener cada uno de los 40 cántaros mezclados*; sacaré 1.° lo que valen los 30 á 19 *rs.* y los 10 á 23, y sumando $30 \times 19 = 570$, con $10 \times 23 = 230$, será el valor de todos los cántaros mezclados 800 *rs.*: divídolos entre el número 40 de cántaros; y saldrá cada uno con 20 *rs.* de valor, que es el precio medio: luego» este debe »ser siempre el cociente del importe ó valor »de la mezcla dividido por el número de es»pecies mezcladas.

2.° *Un labrador tiene trigo de á 30 rs. la fanega, y trigo de á 35; y quiere saber quánto ha de mezclar de cada especie para que le resulte de 32 rs.*

Para que el trigo ds á 30 *rs.* suba en calidad hasta 32; hay que mejorarle en dos grados, que se le deberán subir echándole trigo de á 35: al contrario, los tres grados en que el trigo de á 35 excede al de 32, se le deberán rebajar con el trigo inferior de á 30: luego las diferencias que hay entre el precio medio y los extremos serán los números que expresen la razon en que se han de mezclar los ingredientes que han de componer la mezcla. Tomo pues, la diferencia de 30 á 32 y póngola frente de 35, y frente del 30 la diferencia entre 32 y 35; y tendré que á cada 3 fanegas de á 30 *rs.* se deben mezclar 2 de á 35 para componer trigo de á 32.

30,3
Precio medio 32
35,2

Quando hay mas de dos especies, como si con trigo de á 26, 30 y 35 *rs.* se pidiese hacer trigo de á 32; despues de haber tomado las diferencias de 35 y 30 á 32, se tomarán las de 28 y 35 á 32, poniendo la 1.ª frente de 35 y la 2.ª frente del 28; como se ve en el egemplo: y diremos que á cada 6 fanegas de á 35 se mezclan 3 de á 28 y tres de á 30 para que resulte trigo de á 32. Lo mismo se practicaria con quatro, cinco ò mas especies: es decir, que de cada vez se deben tomar dos

35..2+4=6
32 30..3
28..3

especies una mayor y otra menor que la media, y restarlas de ella, colocando la diferencia de cada especie frente de la otra.

Es preciso advertir que el número de fanegas que ha de componer la mezcla no se limita á los solos números que salen de diferencia, sino que se pueden mezclar todos los que tengan la misma razon que ellos. En el 1.r egemplo se puede hacer trigo de á 32 mezclando, no solo 3 fanegas de á 30 y 2 de á 35, sino qualesquiera otros que esten en la razon de 3 : 2. Si se tuviese por eg. 68 fanegas de trigo de á 35 y se pidiese, quántas se le han de mezclar de á 30: haria la siguiente regla de tres; *á cada 2 fanegas de á 35 se mezclan 3 de á 30, á 68 quántas se han de mezclar?* esto es, $2:3::68:\frac{204}{2}=102$, que son las fanegas que se buscan.

Ultimamente, si queriendo hacer una mezcla de 120 fanegas de á 32 *rs.* con trigo de á 30 y 35; quisiese saber quántas habia de mezclar de cada especie; tendria que dividir 120 en razon de 3:2, y me resultarian 72 fanegas de 30, y 48 de 35 *rs.*

$$3+2:120::\begin{cases}3 : \frac{120 \times 3}{5} = 72\\ 2 : \frac{120 \times 2}{5} = 48\end{cases}$$

Regla de falsa posicion sencilla y doble.

194 Por la regla de *Falsa posicion* se encuentra un número incognito por medio de otro *supuesto*, conforme se ve en los siguientes egemplos.

1.º *Se pide un número cuyo tercio, quarto y quinto sume* 376. Si supongo que sea 60, cuyo tercio 20, quarto 15 y quinto 12 suman 47: haré con esta suma con 60 y 376 esta regla de tres, $47:376::60:\frac{376\times60}{47}=480$: es decir, 47 *tercio, quarto, y quinto de* 60, *es á* 376 *tercio, quarto y quinto del número que busco; como* 60 *es á* 480 : número cuyo tercio 160, quarto 120 y quinto 96 compone 376.

2.º *El libro que un Impresor imprime en* 30 *dias, otro en* 25 *y otro en* 20, *se pregunta en quantos lo imprimirán todos juntos.* Sea en 1 dia; y pues el 1.º imprime en este tiempo $\frac{1}{30}$ del libro, el 2.º $\frac{1}{25}$, y el 3.º $\frac{1}{20}$; todos juntos imprimirán en 1 dia la suma de $\frac{1}{30}+\frac{1}{25}+\frac{1}{20}$, que es $\frac{1850}{15000}=\frac{37}{300}$. Digo pues, *si* $\frac{37}{300}$ *del libro se imprime en un dia,* $\frac{300}{300}$ que es todo el libro, *en quantos se imprimirá?* esto es, $\frac{37}{300}:\frac{300}{300}$ ó $37:300::1:\frac{300}{37}=8\frac{4}{37}$ *dias.*

Quando no alcanza á satisfacer la pregunta una suposicion, se hacen dos, y se

llama la regla de *falsa posicion doble*, como se verá en los casos siguientes.

1.º *Se quieren dividir 300 dob. entre tres; de manera que al 2.º toque el duplo del 1.º y 10 mas, y al 3.º tanto como á los dos menos 4.* Si supongo que se den al 1.º 20, tocará al 2.º $2 \times 20 + 10 = 50$, y al 3.º $20 + 50 - 4 = 66$: y como las tres partes $20 + 50 + 66$ suman solo 136 en lugar de 300, salen de equivocacion 164, que señalo con el signo —: (si la suma hubiera pasado de 300; hubiera notado el exceso con el signo +). Supongo ahora que la parte del 1.º sea 40; serán $80 + 10 = 90$ la del 2.º, y $40 + 90 - 4 = 126$ la del 3.º, la suma de las tres $40 + 90 + 126$ es 256: y el error -44.

20	—164
40	— 44

Multiplico ahora cada número supuesto por el error del otro, y restando el un producto $20 \times 44 = 880$ del otro $40 \times 164 = 6560$, dividiré la diferencia 5680 por la diferencia 120 de los errores y tendré de cociente $47\frac{1}{3}$ parte del 1.º De consiguiente, la del 2.º es $94\frac{2}{3} + 10 = 104\frac{2}{3}$, y la del 3.º $47\frac{1}{3} + 104\frac{2}{3} - 4 = 148$. Con efecto, $47\frac{1}{3} + 104\frac{2}{3} + 148$ componen 300. Quando los errores tienen diferente signo, despues de multiplicar cada número por el error del otro, se suman los productos y se divide la suma por la de los errores.

195 Para demostrar generalmente el me-

todo de practicar esta regla, sean a y b los números supuestos, c y d sus errores y m el número que se busca: y como los errores son tanto menores ó mayores quanto es menor ó mayor la diferencia entre el número supuesto y el verdadero; serán proporcionales los errores c, d á las diferencias $m-a$, $m-b$, entre los números supuestos y el verdadero, esto es, será $c:d::m-a:m-b$: y dividiendo, (177), $c-d:d::m-a-m+b:m-b$, ó $c-d:d::b-a:m-b=\frac{bd-ad}{c-d}$, multiplicando el 2º término por el 3º y partiendo por el 1º Si á este valor de $m-b$ se añade b, se tendrá el de m que será $\frac{bd-ad}{c-d}+b=\frac{bd-ad+bc-bd}{c-d}=\frac{bc-ad}{c-d}$ que es la diferencia entre los productos de cada número supuesto por el error del otro dividida por la diferencia de los errores. Estos se han supuesto del mismo signo: pero si se lo mudamos á uno, y ponemos $-d$ en lugar de $+d$ en la expresion $\frac{bc-ad}{c-d}$; se convertirá en esta $\frac{bc+ad}{c+d}$, que es la suma de dichos productos partida por la de los errores, conforme lo dejamos dicho.

2º *Si 24 varas de lienzo y 35 de tela han costado 752 rs. y cada vara de tela ha costado doble de cada vara de lienzo: ¿cómo han costado el lienzo y la tela?*

Si supongo 6 *rs*, por el precio de cada vara de lienzo, será 12 el de cada vara de tela; las 24 varas de lienzo importan 144 y las 35 de tela 420, que componen 564: luego el 1.er error es−188. Si supongo 9 *rs.* por la vara de lienzo, será 18 la de tela, 216 *rs.* el importe de las primeras, 630 el de las otras, y la suma de todas 846; luego el segundo error será+94. Sumo pues, (por tener distintos signos los errores) los productos 6×94 y 9×188 de cada número supuesto por el error del otro, y partiendo la suma 2256 por 282 suma de los errores, tendré de cociente 8, que es el precio de cada vara de lienzo; luego el de cada vara de tela es 2×8=16 En efecto, las 24 varas de lienzo á 8 *rs.* ó 192 junto con 560 importe de las 35 de tela á 16 *rs.*, componen 752 *rs.*

3º *De dos jugadores el mas diestro ha puesto 12 rs. contra 8 cada juego; despues de 10 juegos el otro le paga 20 rs. ¿ quántos juegos ganó el 1º ?*

Si hubiera ganado 5, serian otros 5 los que ganó el otro, á quien le hubiera tenido que dar 20 *rs.* luego el error es−40: si hubiera ganado 6, ganando el otro 4 hubieran quedado en paz, y es el error −20. Resto ahora los dos productos 5×20 y 6×40 de cada número supuesto por el error del otro (por tener los errores un mismo signo) y

partiendo la diferencia 140 por 20, diferencia de los errores, tendré de cociente 7, que son los juegos que ganó el 1º

Progresiones Geométricas.

196 Una serie de razones geométricas continuas 2:4::4:8::8:16::16:32 &c. forman una *progresion geométrica*, que se escribe así ÷ 2:4:8:16:32; y » es una série de términos que »divididos cada uno por él anterior dan una »misma cantidad de cociente.“ Los que median entre el primero y último se llaman *medios proporcionales geométricos*. Tambien se llama *crescente* ó *decrescente* segun que sus términos aumentan ó van menguando ÷ 2:4:8:16:32 &c. es crescente, y ÷ 32:16:8:4:2 &c. decrescente. Hablaremos en lo sucesivo de la 1ª puesto que á ella se reduce la otra con solo invertir los términos, y que por consiguiente debe tener unas mismas propiedades.

197 Si suponemos que sea a el 1.r término de una progresion geométrica y q el cociente ó esponente de la progresion, será el 2º $a\times q=aq$, el 3.º $aq\times q=aq^2$, el 4.º $aq^2\times q=aq^3$, el 5.º aq^4.... es decir, que cada termino se compondrá del 1.º multiplicado por el cociente elevado á una potencia del mismo grado que el número de términos que le antecede. El 8.º por egemplo, será en la pro-

gresion propuesta $a\times q^7 = aq^7$.... el término n al que anteceden $n-1$ de términos, será $a\times q^{n-1}$: y toda la progresion $\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 ..... aq^{n-1}$. Luego el término 10.mo de la progresion $\div$ 3:6:12:24... cuyo esponente es 2, será $3\times 2^9 = 3\times 512 = 1536$. Si suponemos que sea 1 el 1.r término a de la progresion general, se reducirá á esta $\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 ..... q^{n-1}$, que representa las potencias sucesivas de q; y nos muestra 1.o que dichas potencias en qualquier cantidad forman una progresion geométrica: 2.o que toda serie de términos cuyos esponentes forman una progresion aritmética, están en progresion geométrica.

198 Si el último término aq^{n-1} de la progresion general $\div a : aq : aq^2 .... aq^{n-1}$ se divide por el 1.o a, se tendrá de cociente q^{n-1}, esponente elevado á la potencia $n-1$, número de términos de la progresion menos uno, de donde sacando la raiz $n-1$ resulta $\sqrt[n-1]{q^{n-1}} = q$, esponente de la progresion. De consiguiente, si dadas dos cantidades a, aq^8 se pidiese buscar entre ellas un número qualquiera siete de medios geométricos; dividiré, considerándolas como el 1.o y último términos de una progresion de nueve términos, la mayor aq^8 por la menor a, y sacando de su cociente q^8 la raiz 8.a, indicada por el nú-

mero de términos menos uno ó de medios mas uno; tendré q, que será el cociente ó esponente de la progresion. Multiplicole por a, y tendré aq 1.r medio, vuelvo á multiplicar por q este y los que vayan saliendo: y tendré los demas aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, aq^6, aq^7, y será toda la progresion ∺ $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 : aq^7 : aq^8$.

Si pidiesen entre 4 y 972 quatro medios geométricos, se dividirá el último término 972 por el 1.º 4, y sacando de su cociente 243 la raiz 5.ª se tendrá 3 esponente de la progresion; multiplíquese por él el 4 y los que vayan saliendo, y serán 12, 36, 108, 324 los quatro medios geométricos, y toda la progresion ∺ 4:12:36:108:324:972.

199 Segun lo que dejamos demostrado (170), en la progresion general ∺ $a: aq: aq^2: aq^3$..... entre a^2 y a^2q^2 cuadrados del 1.º y 2.º términos, hay el mismo cociente q^2, que entre a y aq^2 1.º y 3.º términos: luego en qualquier progresion geométrica el 1.r término es al 3.º como el cuadrado del 1.º al del 2.º ó $a:aq^2::a^2:a^2q^2$. Por la misma razon es el 1.r término al 4.º como el cubo del 1.º al cubo del 2.º pues en $a:aq^3::a^3:a^3q^3$ tienen las razones un mismo esponente q^3. Esto quiere decir, que en qualquier progresion geométrica la razon del 1.r término al 3.º es duplicada de la que tiene al 2.º la que tiene al

4.º es triplicada de la del 1.º al 2.º ; la qué tiene al 5.º quadruplicada &c.

200 Si tomamos qualquier número de términos por egemplo siete, de una progresion geométrica, el producto del 1.º y el 7.º, el del 2.º y 6.º, el del 3.º y 5.º y el cuadrado del 4.º ha de ser uno mismo; pues en todos será el quadrado del 1.º multiplicado por la 6ª potencia del cociente. Veamoslo en la progresion general $\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$ $aq^5 : aq^6$, donde $a \times aq^6$, $aq \times aq^5$, $aq^2 \times aq^4$, y $aq^3 \times aq^3$ componen un mismo producto a^2q^6. Si tomamos la progresion $\div 3:6:12:24:48:96$, hallaremos tambien que 3×96, 6×48, y 12×24 producen 288. Luego en qualquier progresion geométrica *el producto de los términos extremos es igual al de dos qualesquiera términos igualmente distantes de los extremos, ó al cuadrado del término medio si el número de términos es impar.*

201 Siendo una progresion geométrica qualquiera $\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32$ &c. una serie de razones continuas $2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16 :: 16 : 32$ &c serán antecedentes todos sus términos ménos el último, y consecuentes todos ménos el 1.º; de suerte que si llamamos s la suma de todos los términos de una progresion geométrica, a el 1.º, aq el 2.º y b el último; será $s - b$ la suma de todos los antecedentes, y $s - a$ la de todos los consequentes: y siendo

(180) la suma de todos los antecedentes de una serie de razones, á la de los consecuentes, como un antecedente a su consecuente; esto es, $s-b : s-a :: a : aq$, ó $aq : a :: s-a : s-b$; será dividiendo (177), $aq-a : a :: s-a-s+b : s-b$; que se reduce á $aq-a : a :: b-a : s-b$. Si multiplico el 2.º por el 3.º y parto por el 1.r termino de esta proporcion, será el último $s-b = \frac{ab-a^2}{aq-a} = \frac{b-a}{q-1}$, suma de todos los términos de una progresion geométrica ménos el último b: añádoselo, y tendré por último $s = \frac{b-a}{q-1} + b = \frac{bq-a}{q-1}$: luego *dicha suma es el producto de su último término por el cociente ménos el 1º, partido por el cociente disminuido de* 1. Si se pidiese la suma de todos los términos de la progresion general $\div a : aq : aq^2 : aq^3 \ldots\ldots aq^{n-1}$; multiplicaria aq^{n-1} por q, restaria de su producto aq^n, a, y dividiendo la diferencia aq^n-a por $q-1$, seria $\frac{aq^n-a}{q-1}$ la suma pedida.

La expresion $s = \frac{bq-a}{q-1}$ se muda, haciendo $q-1=n$, ó $q=n+1$, y poniendo en ella por q su válor $n+1$; en $s=b+\frac{b-a}{n}$: en donde si $q=2$, $s=b+b-a$: si $q=3$, $s=b+\frac{1}{2}(b-a)$: si $q=4$, $s=b+\frac{1}{3}(b-a)$ &c., es decir, que la suma de

los términos de una progresion geométrica dupla ó cuyo esponente es 2, es el último término mas la diferencia entre el 1º y último: en la tripla es el último término con la mitad de la diferencia entre el 1º y último: en la quádrupla es el último término y la tercera parte de la diferencia entre el 1º y último &c.

Si se pidiese el precio de un caballo ajustado de modo que por el 1.r clavo de los 32 de sus quatro herraduras se pague un maravedí, por el 2º 2 mrs, por el 3º 4, y asi de los demas duplicando siempre; habrá que averiguar la suma de la progresion geométrica ∺ 1 : 2 : 4 &c. de 32 términos: para lo qual sacaré su último término que es (197) $1 \times 2^{32-1} = 2^{31} = 2147483648$, y poniéndole en lugar de b, y por a y q sus valores 1 y 2 en la expresion $s = \frac{bq-a}{q-1}$, tendré $s = \frac{2147483648 \times 2 - 1}{2-1} = 4294967295$, suma de los 32 términos y valor del caballo en *mrs.* que componen 126322567 *rs. y medio.*

202 La progresion decrescente se hace crescente para sumar sus términos por este mismo método: y como quando decrece al infinito, podemos considerar el último término como cero; será en tal caso el 1.r término $a = 0$, y la expresion $s = \frac{bq-a}{q-1}$ se mu-

dará en esta $s = \frac{bq-o}{q-1} =$. Luego quando $q=2$, será $s=2b$: si $q=3$, $s=\frac{3b}{2}=b+\frac{b}{2}$: si $q=4$, $s=\frac{4b}{3}=b+\frac{b}{3}$ &c.

La suma de la progresion $\div \frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\frac{1}{16}$..... ó $\div$ o.... $\frac{1}{16}:\frac{1}{8}:\frac{1}{4}:\frac{1}{2}$, es, poniendo por a cero, $\frac{1}{2}$ por b, y 2 en lugar de q; $s = \frac{\frac{1}{2}\times 2-0}{2-1} = 1$.

Tambien suma 1 la progresion $\div \frac{2}{3}:\frac{2}{9}:\frac{2}{27}$ &c. y en general todas las que tienen esta forma $\div \frac{n}{n+1} : \frac{n}{(n+1)^2} : \frac{n}{(n+1)^3}$ &c.

Si se pidiesen las leguas que ha de andar un navío para alcanzar á otro la mitad ménos veloz, que le lleva de ventaja 40 leguas; sumaria los términos de la progresion infinita $\div 40:20:10:5:2\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}$ &c. y serian $s = \frac{40\times 2-0}{2-1} = 80$, las leguas que se piden.

Para saber quando se vuelven á juntar el minutero y la mano de un relox puestos á andar desde las 12, se suman los términos de la progresion $\div 1 : \frac{1}{12} : \frac{1}{144}$ &c. y hallarémos que se juntan á la 1 y $\frac{1}{11}$. Despues se vuelven á juntar á las $2\frac{2}{11}$, $3\frac{3}{11}$ &c. que resultan sumando las correspondientes progresiones.

Permutaciones.

203 Se entiende por *permutacion* el número de situaciones diferentes que se pueden dar á qualquier número de cosas. Si consideramos por exemplo, las letras del alfabeto, una letra *a* no puede tener mas posicion que 1: otra letra mas, *b* puede ponerse ántes y despues de *a*, lo que da las dos permutaciones *ab*, *ba*, ó 1×2: una 3ª letra *c* puede ocupar tres lugares en cada una de las dos permutaciones; al principio, en medio y al fin: esto es, las seis posiciones *cab*, *acb*, *abc*, *cba*, *bca*, *bac*, ó $2 \times 3 = 6 = 1 \times 2 \times 3$. Una 4ª letra *d* podrá ocupar quatro sitios diferentes en cada una de estas seis situaciones; es decir, que quatro letras dan 24 permutaciones, ó $6 \times 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$. Por esta misma cuenta cinco letras darán 120 permutaciones ó $24 \times 5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$: y en general, *n* de letras darán $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times n$ permutaciones. Por la qual regla se averiguará que 12 personas podrán sentarse á la mesa de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times 12 = 479001600$ situaciones diferentes: y necesitarian 15 años y 69 dias para recorrerlas todas, tardando un segundo de tiempo en cada disposicion.

204 Quando hay cosas semejantes entre las que se permutan; *a*, *a* por eg. no tienen

mas posicion que $1 = \frac{1 \times 2}{2 \times 1}$. Quando en tres cosas hay dos iguales como en a, b, b, no hay mas permutaciones que estas *abb*, *bba*, *bab* que son $3 = \frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 1}$. Si de quatro hay dos iguales, las permutaciones son $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{2 \times 1} = 12$; si hay tres, son $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{3 \times 2 \times 1}$. Si de cinco hay dos, ó tres, ó quatro iguales, se tendrá en el 1.r caso $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{2 \times 1}$, en el 2.º $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{3 \times 2 \times 1}$ y en el 3.º $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$. De donde es facil sacar el número de permutaciones para qualquier caso: como si hubiese seis cosas y tres fueren iguales entre sí y otras dos entre sí, serán sus permutaciones $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}$ &c. En general, siendo a, b, c &c. el número de cosas semejantes entre sí, será la expresion de sus permutaciones $\frac{1 \times 2 \times 3 \ldots \times a \times 1 \times 2 \times 3 \ldots \times b \times 1 \times 2 \times 3 \ldots \times c \times 1 \times 2 \times 3 \ldots}{1 \times 2 \times 3 \ldots\ldots\ldots\ldots \times (a + b + c)}$

Combinaciones.

205 Hablemos ahora de las *Combinaciones* ó del número de veces que se pueden tomar muchas cosas de una en una, de dos en dos, de tres en tres &c. y valiéndonos de

por 3 para sacar el que se busca $\frac{25 \times 24 \times 23}{2 \times 3}$.
Siguiendo el mismo método hallaremos...... $\frac{25 \times 24 \times 23 \times 22}{2 \times 3 \times 4}$ por èl número de las combinaciones de quatro en quatro, y así de los demas. De suerte que el número de *ternos* diferentes que se pueden formar con 90 números es $\frac{90 \times 89 \times 88}{2 \times 3} = \frac{704880}{6} = 117480$.

Logaritmos.

208 Como en una progresion geométrica qualquiera $\div q^0 : q^1 : q^2 : q^3 : q^4$.&c. la suma de los esponentes 3 y 4 de dos qualesquiera términos q^3, q^4 equivale á su producto $q^3 \times q^4 = q^7$; la diferencia $7-4=3$ corresponde á q^3 cociente de q^7 partido por q^4; el producto 12 del esponente 3 por 4, á q^{12} 4.ª potencia de q^3; y q^3 raiz 4.ª de q^{12} tiene por esponente 3, cociente de 12 dividido por 4; pensaron los Matemáticos calculando los números por medio de sus esponentes, reducir el multiplicar á sumar, el partir á restar, el subir á las potencias á multiplicar, y á una mera division la estraccion de las raices.

209 Para esto eran necesarias dos cosas: la una hacer que todos los números fuesen términos de la progresion geométrica, y la

otra buscar á cada uno su esponente: Con efecto, se han hecho listas ó tablas en que á los números 1, 2, 3 &c. hasta 10000 y aun 20000 se les han puesto enfrente sus esponentes: y por ellos se encuentran fácilmente los de números mayores. Á estos esponentes „que son los términos de una progresion aritmética que corresponden á otros que están „en progresion geométrica" se ha dado el nombre de *Logarítmos*, y á la lista de estos números *Tabla de Logarítmos*.

210 Para que formemos alguna idea del modo con que se han construido estas tablas; es de saber que entre las diferentes progresiones aritméticas y geométricas que se pudieron escoger para este efecto, adoptaron los Matemáticos las dos siguientes. . . .

Geométrica $\div\div 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 :$ &c.
ó $\div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000$.
Aritmética $\div$ 0. 1. 2. 3. 4 &c.

de manera que cero es el esponente ó logarítmo de 1; 1 es logarítmo de 10; 2 de 100 &c. Los logarítmos de los números 2, 3, 4 &c. que hay entre 1 y 10, los que median entre 10 y 100, entre 100 y 1000 &c. se encontraron de la manera con que vamos á sacar el de 9.

211 Búsquese para esto un medio geométrico proporcional entre 1 y 10, y otro

aritmético entre 0 y 1 (166 y 198) añadiendo ántes ceros de decimales á estos números para sacarlos con mas exâctitud y escusar los quebrados comunes. El medio aritmético es 0,500000 que será logarítmo del geométrico que es 3,162277. Búsquese otro medio geométrico entre este y 10, 000000, y otro aritmético entre 0,5000000 y 1,000000; y se tendrán los dos 5,623413 y 0,750000: este tambien es logarítmo de aquel que todavía está distante de 9. Con efecto, hasta el medio geométrico veinte y seis no sale el 9, 000000, cuyo logarítmo es el 26.to medio aritmético 0, 954242. Sacados con igual trabajo los logarítmos de 2, 3, 5, 7, 11, 13 y demas intermedios que no tienen factores; se sacaron por ellos los otros con mas facilidad. El de 4 por eg. por ser 2×2; sumando consigo el logarítmo de 2: el de 6=2×3; sumando el de 2 y el de 3: el de 9, cuadrado de 3, multiplicando por 2 el logarítmo de 3: el de 15=3×5, sumando los logarítmos de 3 y 5: el de 64 cubo de 8, multiplicando por 3 el logarítmo de 8 &c. pero se han inventado despues métodos mas expedítos de hallar los logarítmos, que explicarémos en otro lugar.

212 La cifra que precede á las decimales de un logarítmo, se llama su *característica*: en 0, 000000, logarítmo de 1 es cero

la característica : en 1 , 000000 , logarítmo de 10 , es 1 : en 2, 000000 , logarítmo de 100 es 2 &c. y de consiguiente consta siempre la característica de tantas unidades ménos una como notas tiene el número á quien corresponde. 3 , 423901 es logarítmo de 2654 número de 4 cifras, una mas que su característica 3.

213 En vista de lo dicho (208), si en lugar de multiplicar dos números , sumamos sus logarítmos ; deberá esta suma corresponder en las tablas al producto de dichos números. Y al contrario , la diferencia de dos logarítmos estará frente del cociente de sus números correspondientes. Asimismo , la potencia de un número debe corresponder al producto de su logarítmo por el esponente de la potencia : y qualquiera raiz al cociente de dicho logarítmo por el esponente correspondiente.

214 Veamos ahora cómo se encuentran los logarítmos de los números que no están en las tablas , y cómo dados los logarítmos, se buscan sus números ; en advirtiendo que como los logarítmos de 10 , 100 , 1000 &c. son 1,000000 , 2,000000 , 3,000000 &c. se sumarán ó restarán de qualquier logarítmo con solo añadir ó restar de su característica, 1 , 2 , 3 &c. unidades ; y como esta suma ó resta equivale á multiplicar ó partir los nú-

meros de dichos logarítmos; será lo mismo *añadir* 1, 2, 3 *&c. unidades á la caracterís-tica de un logarítmo que multiplicar por* 10, 100, 1000 *&c. el número que corresponde al logarítmo*: y al contrario, *restar* 1, 2, 3, *&c. unidades de la característica de un logarítmo será partir su número correspondiente por* 10, 100, 1000 *&c.*

215 Esto supuesto, para encontrar el logarítmo de un entero con un quebrado $6\frac{3}{5}$ por egemplo; se le reducirá á $\frac{33}{5}$, se restará de 1,518514 logarítmo de 33, 0, 698970 logarítmo de 5, y el residuo 0, 819544 será el logarítmo de $\frac{33}{5}$ ó de $6\frac{3}{5}$. Porque siendo $\frac{33}{5}$ cociente de 33 partido por 5, deberá ser su logarítmo la diferencia entre los logarítmos del dividendo 33 y el divisor 5 (213). En un quebrado propio $\frac{5}{33}$ en donde es mayor el logarítmo del denominador, se resta de él el logarítmo del numerador, y la diferencia — 0,819544 con el signo — es el logarítmo de $\frac{5}{33}$. Efectivamente, siendo cero el logarítmo de 1, deben ser negativos los logarítmos de los quebrados propios que son menores que 1: de lo qual nos convencéremos mas, continuando ácia la izquierda las progresiones aritmética y geométrica ya citadas como aquí se ve.......................................

Geométrica	$\div$ &c. $10^{-3} : 10^{-2} : 10^{-1} : 10^{0} : 10^{1} : 10^{2} : 10^{3} : 10^{4}$ &c. ó $\div$ &c. $\frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000$ 10000 &c.
Aritmética	$\div$ — 3. — 2. — 1. 0. 1. 2. 3. 4. &c.

216 Si dado el número 964357 mayor que los de las tablas, se pidiese su logarítmo; le separaré de la derecha dos notas, reduciéndole á 9643,57, número 100 veces menor que el propuesto (28), y que está entre los de la tabla. Busco en ella los logarítmos 3,984212 y 3,984257 de 9643 y 9644, y tomando su diferencia 45 diré: *si por 1 de diferencia entre* 9643 *y* 9644, *salen* 45 *de diferencia entre sus logarítmos; por* 0,57 *de diferencia entre* 9643 *y* 9644,57.... *¿quál debe ser la de sus logarítmos?* Saco de la proporcion 1:45::0,57...... el 4.º término 25,65 ó 26 solamente, despreciando las decimales, parte de logarítmo que corresponde al quebrado 0,57; y juntándola con el logarítimo de 9643, tendré 3,984238 logarítmo de 9643,57: añado 2 á su característica(214), y 5,984238 que resulta por último, será el logarítmo de 964357

Si se diese el número 8706000 para buscarle logarítmo; se tomará en la tabla el de 8706 que es 3,939819, y con 3 unidades mas en su característica por los tres ceros sepa-

rados, será 6,939819 logarítmo de 8706000. Quando el número tiene cifras decimalés, se busca su logarítmo como si fuera entero, y despues se quitan de su característica tantas unidades como notas decimales tiene el número.

217. Si dado un logarítmo qualquiera 8, 986772, se pide el número que le corresponde; se le quitarán á su característica 8 cinco unidades para poderle hallar en la tabla: y pues que 3,986772 que queda, se encuentra en ella frente del número 9700; éste añadido de cinco ceros por la unidades que se quitaron á la característica, es decir, 970000000 será el número que corresponde al logarítmo propuesto 8,986772.

Dado el logarítmo 6,722348 para buscar su número; despues de quitar 3 unidades á la característica 6, no se encuentran en la tabla mas que los primeros guarismos, y viene á caer entre los logarítmos 3,722387 de 5277 y 3,722305 de 5276: es decir, que el logarítmo 3,722348 corresponde á 5276 y un quebrado. Para hallarle, se toma la diferencia 82 entre los logarítmos de 5276 y 5277, y despues la 43 que hay entre el logarítmo 3,722348 y el de 5276; y se dice, *si 82 diferencia entre los logarítmos de 5276 y 5277, da 1 de diferencia entre los números ¿que diferencia dará entre los números, 43*

diferencia entre el logarítmo 3,722348 *y el de* 5276 : esto es, $82:1::43:\frac{43}{82}$. Junto este quebrado á 5276; y $5276\frac{43}{82}$ será con corta diferencia el número que corresponde á 3,722348: luego á 6,722348 corresponderá $5276000\frac{43000}{82}$=5276524,39, número mil veces mayor que el anterior. Las diferencias que hemos supuesto proporcionales, lo son solo próxîmamente y sin error sensible.

218 Para encontrar el quebrado que corresponde á un logarítmo negativo como −0,953430; le sumaré con uno de los logarítmos de 10, 100, 1000 &c. segun el número de decimales que se quiera en el quebrado, sea con 3,000000 logarítmo de 1000; y tendré 3,000000−0,953430=2,046570, que buscado en la tabla corresponde á 111: pártole por 1000, por el 3 que añadí á la característica de su logarítmo, y el cociente 0,111 será el quebrado que se busca.

219 Veamos en algunos egemplos las ventajas de los logarítmos: y sea el 1.º hallar el cociente de 6758 partido por 3015 con diferencia de menos de una milésima. Saco de las tablas de logarítmos los de 6758 y 3015 que son 3,829818 y 3,479287, y restando éste del 1º, tendré 0,350531. Esta diferencia que está entre los logarítmos de 2 y 3, buscada en las tablas con tres unidades mas en su característica, corresponde próxîma-

mente al número 2241, mil veces mayor que el verdadero (214): luego si separo de su derecha tres notas (28), tendré el cociente que busco 2,241 tan próxîmo que no le falta una milésima.

2º Para extraer la raiz 6ª de 20, próxîma hasta las milésimas; dividiré por 6 su logarítmo 1,301030, y buscando el cociente 0,216838 en las tablas con tres unidades mas en su característica, se verá que corresponde próxîmamente á 1647: y de consiguiente será 1,647 la raiz 6ª próxîma de 20.

3º *Si* se pidiese la raiz 8ª del cuadrado de 3796; se multiplicará su logarítmo 3,579326 por 2, y dividiendo por 8 el producto 7,158652, que es el logarítmo del cuadrado de 3796; se tendrá de cociente 0,894831, que con tres unidades en su característica corresponde próxîmamente á 7849: luego la raiz 8ª que se busca, es 7,849.

4º. Encontremos ahora quatro medios geométricos entre $2\frac{2}{3}$ y $5\frac{3}{4}$. En lugar de sacar el esponente de la progresion partiendo $5\frac{3}{4}$ por $2\frac{2}{3}$, y extrayendo del cociente la raiz quinta (198); se restará de 0,759668 logarítmo de $5\frac{3}{4}$, 0,425969 logarítmo de $2\frac{2}{3}$; y dividiendo por 5 la diferencia 0,333699, saldrá de cociente 0,066739, logarítmo del esponente de la progresion. Búsquese el número que le corresponde en las tablas con

una característica de 4 unidades, y separándole quatro cifras de su derecha; se tendrá 1,1661, esponente próximo de la progresion. Multiplíquense por él $2\frac{2}{3}$ y los demas que vayan resultando, y saldrán los quatro medios, 3,109; 3,626; 4,228 y 4,931. Tambien pudieron encontrarse añadiendo sucesivamente al logarítmo 0,425969 de $2\frac{2}{3}$ el del esponente, el de su duplo, triplo y quádruplo; pues así resultan 0,492708; 0,559447; 0,626186; 0,692925 logarítmos de los quatro medios, que se buscarán en las tablas.

Del Complemento Aritmético.

220 Los Matemáticos han logrado convertir en suma la operacion de restar un número de otro; por eg. 6 de 8, añadiendo al 8, 4 diferencia entre 6 y 10, y quitando de la suma 12, 10 que resultan demas por el 6 que no se restó y 4 que se añadió. Si para restar por este método 36 de 68, se suma 68 con 64, diferencia entre 36 y 100, y de la suma 132 se quitan 100 que componen 36 que no se restó y 64 que se añadieron, quedará la resta verdadera 32.

221 »Esta diferencia que va de un número á 1 con tantos ceros como cifras tiene »el número« se llama *Complemento aritmético*, y

se encuentra facilísimamente por ser ceros los guarismos del minuendo. El complemento aritmético de 870372 por eg. que es 129628, se saca restando este número de 1000000, ó cada una de las cifras 8,7,0,3,7 de 9, y la la última 2 de 10.

*Log.*675....2,829304
*Log.*952....2,978637
Complemento aritm.co ....*Log.*527....7,278189
Complemento aritm.co ....*Log.*377....7,423659

20,509789

222 Si para aplicar esta abreviacion á los logarítmos, queremos sacar el producto próxîmo de los quebrados $\frac{675}{527}$, $\frac{952}{377}$; en lugar de restar la suma de los logarítmos de los denominadores 527, 377 de la de los numeradores 675, 952 (49 y 213); añadiremos á los logarítmos de 675 y 952 el complemento aritmético de los logarítmos de 527 y 377, y quitando de la suma 20,000000 que hay demas por los logarítmos de 527 y 377 que no se restaron, y sus complementos que se añadieron; será 0,509789 que queda, el logaritmo del producto de los quebrados; que buscado en las tablas corresponde próxîmamente á 3,234. Tambien se sacará el 4.º término de una regla de tres, sumando con los logarítmos del 2.º y 3.r términos el complemento aritmético del 1.º y buscando en las tablas el número que corresponde á la suma

disminuida de 10, 000000.

223 Si se saca el logarítmo de un quebrado $\frac{5}{8}$ añadiendo á 0,698970 logaritmo de 5 el complemento 9,096910 de 8; se tendrá 9,795880 logarítmo de $\frac{5}{8}$, que queda negativo si se le quita 10,000000 que tiene demas. Pero se facilitará mucho el cálculo de logarítmos de los quebrados no quitándoles el complemento ó complementos que incluyan, hasta haber concluido todas las operaciones que pida dicho cálculo: extendiendo esta observacion á los decimales que se deben considerar con su denominador como si fueran quebrados comunes.

224 Si dado un logarítmo con algunos complementos demas, se pidiese el número que le corresponde; se rebajarán primero los complementos, si se puede, y se hará despues lo que dexamos dicho (217). Pero si el logarítmo es menor que los complementos que hay que restar, como si se pidiese el número á que corresponde el logarítmo 8,732235 que tiene 10,000000 demas; se rebajarán 5,000000, y buscando el residuo 3,732235 en las tablas, se separarán de la derecha del número 5398 á que corresponde, cinco notas para decimales por las 5 unidades que quedaron demas en su característica: y será 0,05398 el número que se busca.

225 Quando se multiplican estos loga-

rítmos, se ha de cuidar de rebajar del producto los complementos que se aumentan. Si se multiplica por 2 un logarítmo con un complemento resultará un producto con dos complementos, ó con 20 unidades demas en la característica. Si se multiplica por 3, serán tres los complementos del producto &c.

226 En la division de estos logarítmos se hace que el dividendo tenga demas tantos complementos como unidades tiene el divisor; pues de esa suerte resultará el cociente con un solo complemento. Para sacar la raiz cúbica de $\frac{276}{547}$, cuyo logarítmo con un complemento es 9,702922; le añadiré ántes dos complementos; y dividiendo por 3 el logarítmo 29,702922 que resulta; tendré 9,900974 logarítmo de la raiz, que si se busca con 10 unidades de exceso en su característica, corresponde por lo que llevamos dicho (214) á 0,7961.

DE LAS EQUACIONES y de la resolucion de los Problemas.

227 Se da propiamente el nombre de *Analísis* á esta parte del Álgebra que enseña á *resolver los Problemas*; esto es, á encontrar una ó mas cantidades desconocidas con ciertas condiciones por medio de otras conocidas que se llaman los *datos* del problema, y son unas señas por donde se viene en conocimiento de lo que se busca.

Para resolver un Problema 1º hay que

hacerse cargo de lo que en él se pide, y de las señas que se dan para encontrarlo. 2.º Se supone que la cantidad que se va á buscar que llamaremos la *incognita*, sea una de las últimas letras x, y, u, z.... del abecedario; y mirándola como conocida, se expresa con signos algébricos la conexîon ó relaciones que con ella tienen las demas cantidades que intervienen en el problema: haciendo, para verificar las condiciones que incluye, los mismos razonamientos y combinaciones que se harian con la incognita, si se conociese.

228 3º De estas operaciones resultarán diferentes expresiones de suma, resta, division, multiplicacion, potencias ó raices de las cantidades conocidas mezcladas con la incognita, entre las que se han de buscar dos iguales para formar con ellas y el signo $=$ lo que llamamos *Equacion*, por cuyo medio se averígua el valor de la incognita, practicando las reglas que daremos en esplicando mejor lo que es equacion.

229 Si suponemos que la cantidad x valga 6, $x+8$ serán 14; y la expresion $x+8=14$ será una equacion. Suponiendo iguales á $ax-c^2$ y $m+c$, será $ax-c^2=m+c$ otra equacion. Cada una se compone de dos partes ó miembros: al 1º le forman las cantidades $x+8$ y $ax-c^2$ que están á la izquierda del signo $=$: y 14, $m+c$ componen el 2º Quan-

do el mayor esponente de la incognita es 1, se llama la equacion de 1.r *grado*, quando es 2, de 2º, si es 3 de 3º, y así de las demas $b^2 - x + c^3x = 3 + a^2x$ es equacion de 1.r grado: $a^2 - y^2 = c - by$ de 2º $z^3 - m = t - cz^2$ de 3º &c.

230 Como la incognita en una equacion ó está sumada ó restada con las cantidades conocidas, ó multiplicada ó partida por ellas; no se llega á averiguar su valor hasta haberla dejado sola en uno de los miembros de la equacion, quedando en el otro solo cantidades conocidas. Entonces se dice que la incognita está *despejada*.

231 »Para separarla de las cantidades »sumadas y restadas, se pasan estas del mi»embro donde están al otro con el signo con»trario.“ Si en la equacion $ab + x - c = 8$ se pasa ál 2º miembro ab y $-c$ mudándoles los signos, se tendrá $x = 8 - ab + c$: donde ya x está despejada, sin perjuicio de la igualdad; pues haber pasado $ab - c$ mudados sus signos, es haber añadido á los dos miembros iguales de la equacion la cantidad $-ab + c$ así, $ab + x - c - ab + c = 8 - ab + c$, que se reduce á $x = 8 - ab + c$: lo qual no puede alterar su igualdad.

232 Por esta operacion, que se llama *trasposicion*, se hacen positivos qualesquiera términos negativos, y al contrario: y así con mudar al 2º miembro el término x de la equacion $a^2 - x - 2 = d^2 - m$, se reduce á esta

$a^2-2=d^2-m+x$, donde pasando d^2-m al 1.^r miembro con signos contrarios, resulta $a^2-2 \cdot d^2+m=x$ en donde está x despejada. De consiguiente, si se mudan los signos á todos los términos de una equacion, se conserva siempre la igualdad de sus dos miembros.

233 »Para separar la incognita de qual»quier cantidad que la multiplique, se par»ten ambos miembros de la equacion por »ella si consta de un solo término, y si tiene »muchos, por la suma de todos ellos." Si en la equacion $a-b^2z=t$, se dividen todos los términos por $-b^2$, multiplicador de z, resultará $-\frac{a}{b^2}+\frac{b^2z}{b^2}=-\frac{t}{b^2}$, esto es $-\frac{a}{b^2}+z=-\frac{t}{b^2}$, ó $z=\frac{a}{b^2}-\frac{t}{b^2}$, pasando $-\frac{a}{b^2}$ al 2.º miembro. Para quitar los multiplicadores a y $-b^2$ de x en la equacion $ax+2-b^2x=c$. dividiré sus dos miembros por su suma $a-b^2$ y tendré $\frac{ax-b^2x}{a-b^2}+\frac{2}{a-b^2}=\frac{c}{a-b}$, que se reduce á esta $x+\frac{2}{a-b^2}=\frac{c}{a-b^2}$, y de consiguiente $x=\frac{c-2}{a-b^2}$.

234 »Quando alguna ó mas cantidades »dividen la incognita, se multiplican los tér»minos de la equacion por cada divisor, y

»quedará desembarazada de ellos dicha in»cognita sin perjuicio de la igualdad.« Sean $\frac{x}{b}-2=a-c^2$: si se multiplica toda la equacion por b que parte á x, se tendrá $\frac{bx}{b}+2b=ab-bc^2$, ó $x-2b=ab-bc^2$, con x libre de b. En la equacion $t+\frac{z}{2}=a^2-\frac{z}{c}$, quedará z sin divisores, multiplicando todos sus términos primero por 2, lo que da $2t+z=2a^2-\frac{2z}{c}$; y despues por c, de que resulta $2ct+cz=2a^2c-2z$. Para quitar los divisores de una vez se multiplica toda la equacion por el producto de todos ellos. Multiplicando en la equacion anterior por $2\times c$ ó $2c$, se tiene $2ct+\frac{2cz}{2}=2a^2c-\frac{2cz}{c}$; que se reduce á $2ct+cz=2a^2c-2z$. Ultimamente, si en la equacion $\frac{3-y}{c}+n=\frac{2y}{a-2}+ab$ se multiplican sus dos miembros por $ac-2c$ producto de los divisores c y $a-2$; se tendrá despues de haber hecho las reducciones regulares, $3a-ay-6+2y+acn-2cn=2cy+a^2bc-2abc$.

235 Supuestas estas reglas, si se nos mandase despejar una incognita en una equacion de 1.^{r} grado; lo 1º »se quita qualquiera »cantidad que haya comun en todos los tér»minos de la equacion dividiéndolos por ella. »Lo 2º se quitan por la multiplicacion todos

»los quebrados donde se halle la incognita. »3º Valiéndose de la trasposicion, se ponen »en uno de los miembros de la equacion to- »dos los términos en que se halle la incognita, y en el otro los que no. 4º Se dividen »ambos miembros de la equacion por las can- »tidades que multiplican la incognita, y se- »guramente se habrá despejado, á no ser que »quede bajo de algun signo radical.

236 En este caso se deja sola en un miembro la cantidad radical, despues se suben ambos á la potencia indicada por el radical, y quedará la incognita desembarazada de este vínculo. En $ab+\sqrt{x}=m$, ó $\sqrt{x}=m-ab$, se suben ambos miembros al cuadrado, y resulta $x=(m-ab)^2$. Si se diese $\sqrt[3]{\left(\frac{ax-x}{3}\right)}-\frac{3}{5}=b$ ó $\sqrt[3]{\left(\frac{ax-x}{3}\right)}=b+\frac{3}{5}$; se subirán al cubo los dos miembros, y se tendrá $\frac{ax-x}{3}=(b+\frac{3}{5})^3$: multiplíquese por 3 y pártase despues por $a-1$, y saldrá por último $x=\frac{3(b+\frac{3}{5})^3}{a-1}$.

Hayase de despejar x en la equacion $\frac{a^2x}{4}-5ax+\frac{ad}{2}-a=am^3-\frac{ax}{d}$, que parto desde luego por a comun á todos sus términos. En $\frac{ax}{4}-5x+\frac{d}{2}-1=m^3-\frac{x}{d}$ que resul-

ta, multiplico por el producto $4d$ de los divisores de x, y saldrá reduciendo, $adx - 20dx + 2d^2 - 4d = 4dm^3 - 4x$. Pongo ahora en el 1.r miembro los términos que tienen x, y en el 2º los que no, y tendré $adx - 20dx + 4x = 4dm^3 - 2d^2 + 4d$: parto últimamente ambos miembros por $ad - 20d + 4$ multiplicador de x, y será reduciendo, $x = \frac{4dm^3 - 2d^2 + 4d}{ad - 20d + 4}$; donde x está ya despejada.

237 Vamos á poner en práctica estas reglas y las que dimos para resolver los problemas, resolviendo algunos que deben servir de modélo para quantos se pueden proponer; en la inteligencia de que llegar derechamente á formar la equacion por la que se resuelve un problema propuesto, es mas obra del talento y tino de cada uno que fruto de las reglas; las quales como son vagas y generales, no es tan facil acomodarlas á los casos particulares.

Problema 1º »Manda uno en su testa»mento dividir 50000 pesos que tiene de »hacienda, entre tres sobrinos; de modo que »al mayor toquen, 300 mas que al mediano. »y á este 200 mas que al último: y se desea »saber quánto deben dar á cada uno.“

En este problema se pide dividir el número 50000 en tres partes tales que la mayor esceda en 300 á la mediana, y esta en

200 á la última: es decir, que la menor con 200 componga la del medio, y ésta con 300 la mayor. Luego si dando por conocida la mas pequeña, la llamo x; será la mediana x con 200 ó $x+200$, y la mayor $x+200+300$. Para que esto sea cierto, ha de componer 50000 la suma de dichas tres partes: sumo, pues x, $x+200$, $x+200+300$, y igualando la suma $3x+700$ á 50000; tendré la equacion $3x+700=50000$: en la que mudando al 2º miembro 700 y partiendo $3x=50000-700$ por 3 que multiplica á x, saldrá $x=\frac{50000-700}{3}=\frac{49300}{3}=16433\frac{1}{3}$ que es el valor de la parte menor x. Será pues, la mediana $x+200$, $16433\frac{1}{3}+200=16633\frac{1}{3}$, y la mayor $x+200+300$, $16433\frac{1}{3}+200+300=16933\frac{1}{3}$. Con efecto, dichas tres partes suman 50000, y sus diferencias son 200 y 300 como lo pide el problema.

2º »Sale Pédro de Madrid caminando 8 »leguas cada dia, y á los 6 dias sale Juan »en su alcance caminando 11 leguas ¿en »quántos dias le alcanzará?«

Si suponemos que le alcance en z dias, habrá andado en este tiempo tantas 11 leguas como dias, ó z veces 11 que son $11z$; en estos mismos dias andará Pedro z veces 8 ó $8z$, que con las 48 leguas de 6 dias á 8 leguas que sacó de ventaja al otro, compo-

nen $48+8z$. Quando le alcance Juan deben ambos haber andado igual número de leguas; luego serán iguales $11z$ y $8z+48$, y se tendrá la equacion $11z=8z+48$: donde $11z-8z=48$, ó $3z=48$, y $z=\frac{48}{3}=16$, número de dias en que Juan anduvo $16\times11=176$ leguas, las mismas que $48+16\times8=176$ que anduvo Pedro.

3.º "Entre dos amigos que juntan bolsas, componen 100 doblones, y el uno tiene 36 mas que el otro ¿quántos tiene cada uno?" Aquí se nos piden dos números, dada su suma 100, y su diferencia 36. Sea pues, el número menor x, será el otro $x+36$, y los dos $x+x+36$: y como han de componer 100, se tendrá $2x+36=100$, $2x=100-36$, y $x=\frac{100-36}{2}=\frac{64}{2}=32$, parte menor: la mayor $x+36$ es $32+36=68$, que con 32 efectivamente compone 100, y le excede en 36.

238 Si en lugar de 100 y 36 se hubiera dado por suma la cantidad a, y por diferencia b, suponiendo x el número menor; sería $x+b$ el mayor, y hubiera sido la equacion $x+x+b=a$, $2x=a-b$, y $x=\frac{a-b}{2}$, número menor. El mayor $x+b$ es $\frac{a-b}{2}+b$ que se reduce á $\frac{a+b}{2}$: y como a y b son canti-

dades generales, podemos inferir que el número mayor de dos cuya suma y diferencia a y b se da conocida, es $\frac{a+b}{2}$ ó *la mitad de la suma y la mitad de la diferencia*, y el menor $\frac{a-b}{2}$, ó *la mitad de la suma ménos la mitad de la diferencia.* De suerte que si dos números suman 60 y se diferencian en 12; será el mayor $\frac{1}{2}(60+12)=36$, y el menor $\frac{1}{2}(60-12)=24$.

239 Quando en lugar de números se ponen letras en el cálculo de los Problemas, su resolucion es general, como la antecedente, y abraza todos los casos posibles en aquella materia. Con este motivo advertirémos que es fácil y conveniente conseguir una resolucion general como la anterior en qualquier problema, si en lugar de los números que en él se den, usamos de letras; cuidando de expresar las cantidades generales con las que le sean mas análogas, representando, por egemplo, el tiempo con la letra t, la velocidad con v; uno de sus grados con 1, dos con 2.... el duplo de una cantidad que se haya supuesto a, con $2a$, sus dos tercios con $\frac{2a}{3}$, su diferencia con otra b, con $a-b$, su producto con ab &c.

4º »Quiere Pedro traer á su taller cier»to número de Obreros, y exâminando su »caudal, halla que si da á cada uno 12 do-

»blones al mes, le faltan 6 para pagarlos, y »dándoles 10 doblones le sobran 4 ¿ quántos »eran los Obreros, y quántos doblones tenia? «

Sea y el número de Obreros: pagados á 12 doblones importan $12\times y$, ó $12y$, cantidad que excede en 6 al caudal de Pedro, el qual por lo tanto será $12y-6$. Pagados á 10 importan $10y$ que con 4 componen dicho caudal, que tambien será $10y+4$. Iguálense ahora estas dos expresiones, y se tendrá $12y-6=10y+4$, ó $12y-10y=6+4$, esto es, $2y=10$, ó $y=5$, número de Obreros. Serán pues los doblones $12y-6=12\times5-6=54$, ó $10y+4=10\times5+4=54$.

Si se hubiera supuesto x el número de doblones, con $x+6$ se hubiera pagado á 12 doblones los Obreros, cuyo número sería..... $\frac{x+6}{12}$. Con $x-4$ se pagaban á 10, y por lo mismo $\frac{x-4}{10}$ es tambien el número de Obreros. Será pues, $\frac{x-4}{10}=\frac{x+6}{12}$: donde quitando los quebrados, resulta $12x-48=10x+60$, $12x-10x=60+48$, ó $2x=108$, y $x=54$.

Sea ahora en general x el número de Obreros, a el mayor precio, b el menor, c lo que falta para pagar al precio subido, y d lo que sobra pagando al precio inferior.

Segun lo que digimos en la 1ª resolucion $ax-c$ y $bx+d$ expresan el número de doblones, y por eso $ax-c=bx+d$, $ax-bx=c+d$, y $x=\frac{c+d}{a-b}$; y será el número de Obreros *la falta y la sobra* c+d *partida por la diferencia* a—b *de los precios* : el número de doblones se saca poniendo en $ax-c$, ó en $bx+d$ el valor de x : poniéndole en $ax-c$, es

$$ax\left(\frac{c+d}{a-b}\right)-c=\frac{ac+ad-ac+bc}{a-b}=\frac{ad+bc}{a-b}.$$

5º „Un galgo á 100 varas de una lie„bre ¿quándo la alcanzará, en la suposicion „de que el perro anda 3 varas, mientras la „liebre anda 2?"

Supongamos que la liebre anda x v. ántes de ser cogida; andará el perro $100+x$: y como estas dos distancias están en razon de 2 á 3, será $2:3::x:100+x$: luego (174), $3x=200+2x$ ó $x=200$. Si hubiera sido $m:n$ la razon de las distancias, hubiera resultado, suponiendo $100=a$, $m:n::x:a+x$, y $nx=am+mx$, $nx-mx=am$, y $x=\frac{am}{n-m}$.

6º „Uno dejó en su testamento á su hijo „mayor 100 doblones y el décimo de lo res„tante de su hacienda : al 2º 200 doblones „y el décimo de lo que quedase : al 3º 300 „con el décimo de lo restante : al 4º 400

»con el décimo.... : continuando de esta suer-
»te hasta el último, á quien deja el sobrante
»de las partes de sus hermanos: egecutado el
»testamento, salieron todos con partes iguales
»¿quántos eran los hijos, quánto la hacienda,
»y quánto cupo á cada uno? «

Llamemos los 100 doblones a, y supongamos x la hacienda. Quitando 100 doblones ó a de la hacienda x para el 1.^r hijo, queda $x-a$, cuyo décimo $\frac{x-a}{10}$ junto con a compondrá su parte $a+\frac{x-a}{10}$, que se reduce á $\frac{9a+x}{10}$. Quitando de la hacienda x esta cantidad y 200 doblones ó $2a$ para el 2.º hijo, queda reducida á $x-\frac{9a-x}{10}-2a=\frac{9x-29a}{10}$: el décimo de esta cantidad es $\frac{9x-29a}{100}$, y sumado con $2a$ compone $2a+\frac{9x-29a}{100}$ ó.................. $\frac{171a+9x}{100}$ parte del 2.º hijo. Como todas las partes deben ser iguales, formaré de las dos halladas la equacion $\frac{9a+x}{10}=\frac{171a+9x}{100}$, donde multiplicando por 100, resulta $90a+10x=171a+9x$, ó $10x-9x=171a-90a$, y por

último $x=81a=81\times100=8100$ valor de la hacienda : que dividida por una de las partes $\frac{9a+x}{10}=\frac{900+8100}{10}=900$, da $\frac{8100}{900}=9$, número de los hijos.

7.º »Tres comerciantes emplean 1500 »doblones en un negocio ¿quál debe ser su »ganancia para que al fin del año toquen á »cada uno 398 doblones ?«

Si se supone la ganancia x, resultarán $1500+x$ al fin del año : y pues que debe tocar de esto á cada uno de los tres 398, será $\frac{1500+x}{3}=398$, $1500+x=1194$, y de consiguiente $x=1194-1500=-306$. Este valor negativo significa que hubo pérdida y no ganancia en el empleo, y de consiguiente que el problema está mal propuesto. Efectivamente, si de 1500 se quita la pérdida 306, y se divide entre los tres el residuo 1194, tocarán 398 doblones á cada uno.

8.º »Se pide un método que abrevie la »práctica de la regla de falsa posicion do»ble (194).« Supongamos y lo que se ha de añadir ó quitar al número supuesto para que salga el verdadero x : sea d la menor equivocacion y b el número del qual resulta, dejando las demas suposiciones (194) invaria-

bles. Si b es menor que x, será $y+b=x=\frac{bc-ad}{c-d}$, y $y=\frac{bc-ad}{c-d}-b=\frac{bd-ad}{c-d}=\frac{(b-a)d}{c-d}$.... Suponiendo á b mayor que x hubiera salido $b-y=x=\frac{bc-ad}{c-d}$, donde $y=\frac{(a-b)d}{c-d}$.

Esto quiere decir que si se multiplica por el menor error la diferencia de los números supuestos, y el producto se parte por la diferencia de los errores quando tienen un mismo signo, ó por su suma si le tienen diverso; saldrá de cociente lo que se ha de añadir al número supuesto, si es menor que el verdadero, ó lo que se ha de quitar si es mayor, para que resulte el verdadero.

Si en el 1.º de los egemplos que allí pusimos, se multiplica 3, diferencia entre los números supuestos 6 y 9, por el menor error 94, y se parte el producto 282 por la suma de los errores 282; se tendrá 1 de cociente, que restado de 9, da el número verdadero 8. En el 2.º egemplo multiplicando por el menor error 20, 1 diferencia entre 5 y 6, y partiendo el producto por 20 diferencia de los errores; sale tambien 1, que añadido á 6 da el número verdadero 7.

Los problemas siguientes servirán de egercicio á los principiantes: y aunque se deja á su habilidad el modo de resolverlos, añadimos la solucion para que les sirva de guia.

9.º »A y B, se pusieron á jugar con »igual número de pesos: A perdió 12 y B »57, y quedaron á A quatro veces mas pesos »que á B ¿quántos tenian? Resp. 72 *pes.*

10.º »Pactó un Jornalero perezoso re- »cibir 12 rs. y de comer el dia que trabaja- »se, y pagar el dia que no 6 rs. al Amo por »la comida. Echaron cuentas á los 30 dias y »quedaron en paz ¿quántos dias trabajó? »Resp. trabajó 10 dias y holgó 20.

11.º »Hurtaron dos 60 dob. y habien- »do reñido al repartirlos, arrebató cada uno »lo que pudo: puestos en paz, dió el 1.º al »2.º $\frac{1}{4}$ de lo que cogió, y el 2.º al 1.º $\frac{1}{3}$, y »quedaron con partes iguales ¿quánto arre- »bató cada uno? Resp. el 1.º 24 y el 2.º 36.

12.º »Uno dejó en su testamento la mi- »tad de su hacienda á su hijo mayor, al 2.º »$\frac{5}{18}$ de dicha hacienda, $\frac{1}{5}$ á su hija y 1200 *pes.* »para sufragios. ¿Qué hacienda tenia? Resp. »54000 *pes.*

13.º »Quál es el número que partido por »3, es excedido de 20 en lo que 30 excede »al dicho número? Resp. 15.

Problemas con mas de una incognita.

240 Quando hay que averiguar en un problema, dos, tres ó mas incognitas; debe haber en él otros tantos datos, ó condiciones;

entónces se formará con ellas igual número de equaciones, y se sacará el valor de las incognitas por las reglas siguientes.

241 »Si hubiese dos equaciones con dos »incognitas, se despeja una de ellas en ambas »equaciones, y con los dos valores que resul»tan, se forma una equacion, que solo ten»drá una incognita: despejese esta, y substi»tuyendo su valor en qualquiera de las dos »equaciones en que se despejó la 1.ª, se habrá »averiguado tambien lo que vale.«

Probl. 14.º »Dos Amanuenses han trasla»dado 280 pliegos entre ambos, el uno A tra»bajando 5 dias, y el otro B trabajando 8. »Los mismos han copiado 288 pliegos traba»jando A 7 dias y B 6 ¿ quántos pliegos escri»be cada uno al dia? «

Si supongo x los pliegos que copia A, y z los que copia B; serán $5\times x$ ó $5x$ los pliegos que de los 280 copió A en 5 dias, y $8z$ los que copió B en 8 dias: y de consiguiente será $5x+8z=280$. Por lo mismo serán $7x$ los pliegos que de los 288 habrá escrito A, y $6z$ los de B; y será $7x+6z=288$. Despejo x en ambas equaciones, y tendré en la 1.ª $x=\frac{280-8z}{5}$, y en la 2.ª $x=\frac{288-6z}{7}$ Igualo ahora estos dos valores de x, y resultará la equacion $\frac{280-8z}{5}=\frac{288-6z}{7}$, con una sola in-

cognita z: despejándola sale $z=20$, cuyo valor substituido por z en una de las dos equaciones en que se despejó x, v. gr. en la 1.ª $x=\frac{280-8z}{5}$; la reduce á $x=\frac{280-8\times20}{5}$, esto es $x=24$. Diré, pues, que de los 280 copió A $24\times5=120$, y B $20\times8=160$: y de los 288 A trasladó 168, y B 120.

Si hubieramos supuesto $280=a$, $5=b$, $8=c$: $288=d$, $7=e$, $6=f$: serian las equaciones $bx+cz=a$, $ex+fz=d$. Despejando x, sale $x=\frac{a-cz}{b}$, $x=\frac{d-fz}{e}$: igüalo estos valores, $\frac{a-cz}{b}=\frac{d-fz}{e}$; y será $z=\frac{bd-ae}{bf-ce}$. Póngase este valor en la equacion $x=\frac{a-cz}{b}$, y saldrá por último $x=\frac{a-c\left(\frac{bd-ae}{bf-ce}\right)}{b}$, que se reduce á $x=\frac{af-cd}{bf-ce}$.

15.º »En una mezcla de oro y plata que »tiene 8 pulgadas cúbicas de volumen, y »pesa 5 libras ó 80 onzas, se quiere saber »quántas pulgadas hay de oro, y quántas »de plata, en la inteligencia de que cada »pulgada cúbica de oro pesa 12 onzas y $\frac{2}{3}$, y »la de plata 6 onzas y $\frac{8}{9}$ «

Sea x el número de pulgadas de oro de la mezcla, y z el de las de plata, y será $x + z = 8$, 1.ª equacion. El peso del oro á razon de $12\frac{2}{3}$ cada pulgada, es $12\frac{2}{3} \times x$ ó $\frac{38x}{3}$; y el de la plata á $6\frac{8}{9}$ cada pulgada, $6\frac{8}{9} \times z$ ó $\frac{62z}{9}$: y como toda la mezcla pesa 80 onz. se tendrá la 2.ª equacion $\frac{38x}{3} + \frac{62z}{9} = 80$. Despejese x en las dos, y será en la 1.ª $x = 8 - z$, y en la 2.ª $x = \frac{720-62z}{114}$. Será pues, $\frac{720-62z}{114} = 8 - z$; de donde se saca $z = 3\frac{9}{13}$: luego $x = 8 - z = 8 - 3\frac{9}{13} = 4\frac{4}{13}$. Estos dos valores ademas de sumar 8; si se multiplican $3\frac{9}{13}$ por $\frac{62}{9}$, y $4\frac{4}{13}$ por $\frac{38}{3}$, producirán 80 onzas.

Si se supone a el volumen de la mezcla, b lo que pesa; c el peso de cada pulgada del un metal, y d el del otro; serán $x + z = a$, y $cx + dz = b$ las dos equaciones; en las que $x = a - z$, $x = \frac{b-dz}{c}$. Hagase ahora $a - z = \frac{b-dz}{c}$; y será $z = \frac{ac-b}{c-d}$: y sustituyendo este valor en $x = a - z$, será $x = a - \frac{ac+b}{c-d} = \frac{b-ad}{c-d}$: valores generales para toda especie de mezcla.

242 »Si ocurriesen tres equaciones con »tres incognitas x, z, y, por eg. se despejará »qualquiera de ellas, x en las tres equacio»nes, é igualando el valor mas sencillo de x »á los otros dos, resultarán dos equaciones »con las dos incognitas z, y, que se despe»jan como acabamos de decir. Conocidas z,y, »se conocerá x substituyendo en una de las »tres equaciones en que se despejó, los valores »de z, y. Quando hay quatro ó mas equacio»nes é incognitas, se despeja una en todas, se »igualan sus valores para tener una equacion y »una incognita menos, y se continua así hasta »llegar á una sola equacion con una sola in»cognita, haciendo despues las sustituciones »correspondientes.

Prob. 16.º »Un General divide su tropa »en tres trozos, les ofrece de agasajo, si to»man una plaza que va á sitiar, 2703 *dob.* »de los que han de percibir 3 *dob.* cada uno »de los soldados del trozo que éntre primero »en ella, y los restantes se han de repartir »igualmente entre los soldados de los demas »trozos. Hallase pues, que si el 1.r trozo en»tra primero, toca á cada uno de los solda»dos de los demas á doblon y medio: si en»tra primero el 2.º caben los demas á doblon, »y si entra el 3.º tocan á 45 rs. ó $\frac{3}{4}$ de do»blon á los otros: y se pregunta el número »de soldados de cada trozo.«

Supongamos x el número de soldados del 1.r trozo, z por los del 2º y los del 3º y llamemos 2703, a. Si entra el 1.r trozo primero, son $3x$ los doblones que perciben sus soldados, y como toca doblon y medio á los demas, consumirán $1\frac{1}{2}(z+y)$ ó $\frac{3z+3y}{2}$ que con $3x$ compondrán 2703 ó a, y será la 1.ª equacion $3x+\frac{3z+3y}{2}=a$: si entra primero el 2º trozo, consumen sus soldados $3z$; y los demas que tocan á doblon, $x+y$, y la 2.ª équacion es $3z+x+y=a$. Entrando el 3º primero, son $3y$ los doblones que se reparten á sus soldados, y $\frac{3x+3z}{4}$ los demas: luego la 3.ª equacion es $3y+\frac{3x+3z}{4}=a$.

Despejando ahora x en las tres, resulta $x=\frac{2a-3z-3y}{6}$, $x=a-3z-y$, $x=$............... $\frac{4a-12y-3z}{3}$. Igualese el 2º valor, que es el mas sencillo, á cada uno de los otros, y se tendrá despejando z en las dos equaciones, $a-3z-y=\frac{2a-3z-3y}{6}$, $a-3z-y=$... $\frac{4a-12y-3z}{3}$ que resultan; $z=\frac{4a-3y}{15}$, $z=$

$\frac{9y-a}{6}$. Fórmese por último, de estos dos valores la equacion $\frac{4a-3y}{15}=\frac{9y-a}{6}$; de donde se saca $y=\frac{39a}{153}=\frac{39\times2703}{153}=689$, soldados del 3.r trozo. Pongo este valor en la equacion $z=\frac{9y-a}{6}$, y saldrá $z=\frac{9\times689-2703}{6}=583$, soldados del 2º trozo. Sustituyo últimamente los dos valores de z, y, en la equacion $x=a-3z-y$; y será $x=2703-3\times583-689=265$, soldados del 1.r trozo. En efecto, si se hace la prueba, se verá que $3\times265+\frac{3}{2}(689+583)=2703$, $3\times583+265+689=2703$, y finalmente $3\times689+\frac{3}{4}(265+583)=2703$.

Los siguientes problemas servirán de egercicio á los jóvenes.

17.º »Si al valor de una de dos alajas que »uno tiene, se añaden 150, resulta un valor »triplo de la otra: y si al precio de esta se »añaden los 150, iguala á la 1.ª ¿Quánto »vale cada una? Resp. La 1.ª 300 y la otra »150.

18.º »¿Qué números suman 570, de los »quales $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$ del 1.º iguale á $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$ »del 2.º? Resp. 264, y 306.

19.º »Quarenta y nueve personas comen

»una merienda que importa 40 *pe.* Cada hom- »bre paga 4. *pe.* cada muger 3 y cada niño $\frac{1}{5}$; »¿quantos hombres, mugeres y niños hay, en »el supuesto de que este ultimò numero es »quadruplo del de los otros dos añadidos de »4? «Resp. 5 *homb.* 4 *mug.* y 40 *niños.*

20. »Tres se ponen a jugar: á la 1ª par- »tida perdió el 1º igual cantidad que los otros »tenian: á la 2ª perdió el 2º otro tanto quan- «to tenian el 1º y 3º En la 3ª partida per- »dió el 3º tambien cantidad igual á la de los »otros dos: y al fin del juego salieron los tres »con igual dinero 24: con quanto se puso á »jugar cada uno? Resp. el 1º con 39, el 2º, con 21 y el 3º con 12 pesos.

Problemas indeterminados.

243 Los problemas resueltos hasta aquí se llaman *determinados*, porque tienen tantas incognitas como condiciones. Quando estas son mas que las incognitas, se llama el problema *mas que determinado*, y sucede frecuentemente que las que hay demas, ó son inútiles ú oponiéndose unas a otras hacen el problema imposible.

Pidense por exemplo, dos números x, z cuya suma sea 8, su diferencia 2, y su producto 12. De las tres equaciones $x+z=8$, $x-z=2$, $xz=12$, que resultan, la 2ª da

$x=z+2$, y substituyendo este valor en la 1.ª, se tiene $z+2+z=8$, ó $z=3$: puesto este valor en la 2.ª resulta $x=5$. Pongase ahora el producto 3×5 en lugar de xy en la 3.ª equacion, y la reducirá á $15=12$, consecuencia falsa que muestra que el problema es imposible.

244 Si la tercera condicion del problema hubiera pedido que el producto fuese 15; hubiera sido la 3.ª equacion $xy=15$: y sacando de las dos primeras equaciones $x=5$, $z=3$, sustituyendo el producto de estos dos números en lugar de xy en la 3.ª equacion; hubiera resultado $15=15$: equacion que se llama *idéntica*, por tener unas mismas cantidades en ambos miembros, y que confirma la inutilidad de la 3.ª condicion para el problema.

En general, quando despues de haber llenado las condiciones de un problema, resulta una equacion idéntica, es prueba de que á todas las cantidades de la clase de que habla el problema, conviene la propiedad que en él se propone. Si se pidiese un número x de cuyo duplo restando 1, y del duplo de la resta quitando 2, partiendo despues el residuo por 4; resultase el número x-1; se hubiera tenido $\frac{4x-4}{4}=x-1$, donde $x-1=x-1$: equacion idéntica que muestra, que conviene á qualquier número la propiedad expresada en el problema.

245 Llamamos á un problema *indeterminado* quando hay en él mas incognitas que condiciones ó que equaciones: si se piden dos números x, z, tales que restando el 2.º del 1.º sea la diferencia el duplo del 1.º ménos 6; se tendria una sola equacion $x-z=2x-6$ con dos incognitas. En este caso se despeja una de ellas $x=6-z$, y dando á arbitrio diferentes valores á z, se tienen otros tantos valores de x. Si se hace $z=0$, será $x=6$: si $z=1$, $x=6-1=5$; si $z=20$, será $x=6-20=-14$ &c. hasta el infinito.

246 Quando en estos problemas se exîge que los valores de x, z sean números enteros y positivos, se ciñe á pocas el infinito número de soluciones, y queda el problema medio determinado, ó *semideterminado*: el anterior por eg. no admite mas que las siete soluciones siguientes:

$$z=0,\ z=1,\ z=2,\ z=3,\ z=4,\ z=5;\ z=6;$$
$$x=6,\ x=5;\ x=4,\ x=3,\ x=2,\ x=1,\ x=0.$$

Y por quanto no es de nuestro instituto estendernos en los métodos generales inventados hasta aquí para averiguar el número de soluciones de los problemas semideterminados, nos contentarémos con una muestra de ellos, resolviendo los problemas siguientes.

1.º „Cierto número de varas de paño á

„21 rs. y de tela á 31 importan 1770 rs. „¿quántas hay de cada cosa en números enteros? "

Siendo x el número de varas de paño y z el de las de tela, tendrémos $21x+31z=1770$, y despejando la incognita x que tiene menor coeficiente, $x=\frac{1770-31z}{21}=84-z+\frac{6-10z}{21}$, dividiendo por 21. Como esta cantidad ha de ser número entero, lo será tambien $\frac{6-10z}{21}$ ó $\frac{10z-6}{21}$. Llamemos, pues E, E', E'' un entero, y tendremos $\frac{10z-6}{21}=E$, y $z=\frac{21E+6}{10}=2E+\frac{E+6}{10}$. Tambien $\frac{E+6}{10}$, $=E'$ número entero, y de consiguiente $E=10E'-6$. Este valor que ya no tiene quebrado, sustituido en la equacion $z=\frac{21E+6}{10}$ la reduce á $z=21E'-12$: y éste puesto en $x=\frac{1770-31z}{21}$, da $x=102-31E'$.

Aunque de las dos equaciones $z=21E'-12$, $x=102-31E'$ me dice la 1ª que saldrá número entero y positivo sustituyendo por E qualquier cantidad que no sea cero; pero por la 2ª ha de ser tal el valor de E'

que 31 E' sea menor que 102, ó E' menor que $\frac{102}{31}=3\frac{9}{31}$: luego el problema tiene solo tres soluciones, la 1ª haciendo $E'=1$, en cuyo caso $x=71$, $z=9$, el importe de las varas de paño 1491, y 279 el de las de tela. La 2ª haciendo $E'=2$, y entónces $x=40$, $z=30$, el valor del paño 840, y el de la tela 930. Y la 3.ª haciendo $E=3$, en cuyo caso $x=9$, $z=51$, el paño 189, y la tela 1581.

2º „Se pide componer 741 rs. con 41 „piezas de tres especies, á saber de 24, de „19 y de 10 rs. "

Si son x, z, y respectivamente los números de monedas de cada especie, será $x+z+y=41$, y $24x+19z+10y=741$. En estas dos equaciones se tiene $x=41-z-y$, $x=\ldots\ldots$ $\frac{741-19z-10y}{24}$, y de consiguiente $41-z-y=$

$$\frac{741-19z-10y}{24}, \text{ y } z=\frac{243-14y}{5}=48-2y+\frac{3-4y}{5}.$$

Hagase ahora $\frac{3-4y}{5}=E$, será $y=\frac{3-5E}{4}=$ $-E+\frac{3-E}{4}$: y suponiendo $\frac{3-E}{4}=E'$, será $E=3-4E'$. Puesto este valor en $y=\frac{3-5E}{4}$, resulta $y=5E'-3$: y en $z=\frac{243-14y}{5}$ sustitu-

yendo el de y, sale $z = 57 - 14E'$: y puestos los de z, y, en $x = 41 - z - y$, se tiene por último $x = 9E' - 13$.

Concluyo pues, de las tres equaciones $x = 9E' - 13$, $z = 57 - 14E'$, $y = 5E' - 3$ que para tener soluciones en números enteros y positivos, E' ha de ser tal 1º que $9E'$ sea mayor que 13, ó E' mayor que $\frac{13}{9}$; 2º que $14E'$ ha de ser menor que 57 ó E' menor que $\frac{57}{14} = 4\frac{1}{14}$: 3º que $5E'$ sea mayor que 3, ó E' mayor que $\frac{3}{5}$. Luego solo puedo dar á E' los tres valores 2, 3, 4, que dan las tres soluciones siguientes del problema, $x = 5$, $z = 29$, $y = 7$: $x = 14$, $z = 15$, $y = 12$: $x = 23$, $z = 1$, $y = 17$.

3º „Entre dos tienen 100 dob. la parte „del 1º contada siete á siete, y la del 2º „ocho á ocho dan de resta 7, ¿ quánto tiene „cada uno ? "

Sea $7z + 7$ la parte del 1º y $8x + 7$ la del 2.º será $7z + 8x + 14 = 100$, y $z = \frac{86-8x}{7} = 12 - x + \frac{2-x}{7}$. Hago $\frac{2-x}{7}$ ó $\frac{x-2}{7} = E$, y tendré $x = 7E + 2$, y de consiguiente $z = \frac{86-8x}{7} = 10 - 8E$; equacion donde solo se puede poner por E cero y 1 : y así de solos dos modos se puede desatar el problema. Si $E = 0$, sale $z = 10$, y $x = 2$, y la parte del

1.º $7z+7=77$, y la del 2.º $8x+7=23$. Si $E=1$, $z=2$, $x=9$, $7z+7=21$, y $8x+7=79$.

4.º „Hallar dos números cuadrados cuya „suma sea a, número entero y positivo.

Si se suponen dichos números x^2, z^2; se tendrá $x^2+z^2=a$, y $x=\sqrt{(a-z^2)}$: es decir, que el problema no será posible 1.º si z^2 es mayor que a y lo mismo x^2; pues si $a=17$, y $z=5$, $\sqrt{(a-z^2)}$ se reduce á $\sqrt{-8}$, cantidad imaginaria ó imposible : lo 2.º si $a-z^2$ no es un cuadrado perfecto; pues si $a=17$, $z=3$, $\sqrt{(a-z^2)}=\sqrt{8}$ no desata la cuestion por no ser 8 cuadrado perfecto; con que si $a=17$, solo es posible haciendo $z=1$, en cuyo caso $\sqrt{(a-z^2)}=\sqrt{16}=4$, y suponiendo $z=4$; pues entónces $\sqrt{(a-z^2=)}\sqrt{1}=1$.

5.º „Hallar dos cuadrados que se dife„rencien en a cantidad entera y positiva."

Si llamamos x la suma de las raices de los dos números y z la diferencia, serán los números (238), $\frac{x+z}{2}$, $\frac{x-z}{2}$: la diferencia de sus cuadrados es $\frac{x^2+2xz+z^2-x^2+2xz-z^2}{4}$, que se reduce á xz : luego $xz=a$; y la diferencia dada es siempre el producto de la suma de las raices de los números multiplicados por la diferencia.

Sea $a=60$, y como sus factores son 1×60, 2×30, 3×20, 4×15, 5×12, 6×10; tendrá el problema seis soluciones, bien que solo con 2 y 30, 6 y 10 números pares, resultan números enteros. Si $x=30$, $z=2$, $\frac{x+z}{2}=16$, $\frac{x-z}{2}=14$, sus cuadrados son 256 y 196 que se diferencian en 60. Si $x=10$, $z=6$......., $\frac{x+z}{2}=8$, $\frac{x-z}{2}=2$, y sus cuadrados 64 y 4 tambien se diferencian en 60.

Equaciones y Problemas de segundo grado.

247 Quando estas equaciones son *completas* ó no tienen mas términos con la incognita que el de su cuadrado; se resuelven dejando en un miembro este término solo, sin coeficiente, y con signo positivo, y sacando despues la raiz de ambos miembros. En la equacion $a=c^2-dx^2$, se pasa al 1.r miembro $-dx^2$, y los demas al 2.º, se le quita el coeficiente d, y queda $x^2=\frac{c^2-a}{d}$; despues se saca de ambos miembros la raiz cuadrada, y resulta $x=\pm\sqrt{\left(\frac{c^2-a}{d}\right)}$. Con los signos $\pm$ del radical se significan las dos

raices positiva y negativa que tiene el cuadrado $\frac{c^2-a}{d}$ (113), el qual es producto de $\sqrt{\left(\frac{c^2-a}{d}\right)}\times\sqrt{\left(\frac{c^2-a}{d}\right)}$ ó de $-\sqrt{\left(\frac{c^2-a}{d}\right)}\times-\sqrt{\left(\frac{c^2-a}{d}\right)}$. Si la equacion hubiera sido $az^2-3b=c+bz^2$, ó $az^2-bz^2=c+3b$; divididos ambos miembros por $a-b$, y sacando la raiz del resultado $z^2=\frac{c+3b}{a-b}$, se tiene.......

$$z=\pm\sqrt{\left(\frac{c+3b}{a-b}\right)}.$$

248 Quando hay uno, dos ó mas términos con la incognita ademas de su cuadrado, como en $x^2+2ax=b$; puestos todos en un miembro se vé que á x^2+2ax cuadrado de la 1.ª parte x, y duplo de la 1.ª multiplicado por la 2.ª a, falta el cuadrado de la 2.ª parte para ser cuadrado completo: luego habrá que añadirle para que lo sea, a^2 cuadrado de a, mitad de $2a$ que multiplica á x, el qual se añadirá tambien al 2.º miembro para que se conserve la igualdad. Resulta pues, la equacion $x^2+2ax+a^2=b+a^2$, de cuyos dos miembros sacando la raiz cuadrada, se tiene $x+a=\pm\sqrt{(b+a^2)}$ ó $x=-a\pm\sqrt{(b+a^2)}$.

249 Estas equaciones se llaman *incompletas*; y se resuelven generalmente „poniendo prime„ro en un miembro los términos donde se „halle la incognita, dejando positivo al del „cuadrado, y con 1 de coeficiente: se aña„de despues á ambos miembros el cuadrado „de la mitad de la cantidad ó cantidades que „multiplican la incognita, y se saca por últi„ mo la raiz de dichos miembros.“

Sirva de egemplo la equacion $cx-bd=dx-ax^2$, que dispuesta así, $ax^2+cx-dx=bd$, y dividiéndola por a, se reduce á esta $x^2+\frac{cx-dx}{a}=\frac{bd}{a}$. Añado ahora á sus dos miembros $\left(\frac{c-d}{2a}\right)^2$ cuadrado de la mitad de $\frac{c-d}{a}$ que multiplica á x; y tendré $x^2+\frac{cx-dx}{a}+\left(\frac{c-d}{2a}\right)^2=\frac{bd}{a}+\left(\frac{c-d}{2a}\right)^2$, cuyo 1.er miembro es cuadrado completo: saco la raiz de ambos, y como resulta $x+\frac{c-d}{2a}=\pm\sqrt{\left(\frac{bd}{a}+\left(\frac{c-d}{2a}\right)^2\right)}$; será por ultimo $x=-\frac{c-d}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{bd}{a}+\left(\frac{c-d}{2a}\right)^2\right)}$.

Si se hubiese dado la equacion $4z^2-8c=4z\frac{cz}{a}-4b$, que ordenada y dividida

por 4, es $z^2 + \frac{cz}{4a} - z = 2c - b$; se hubiera completado añadiendo $\left(\frac{c}{8a} - \frac{1}{2}\right)^2$ cuadrado de la mitad de $\frac{c}{4a} - 1$ que multiplica á z; el resultado es $z^2 + \frac{cz}{4a} - z + \left(\frac{c}{8a} - \frac{1}{2}\right)^2 = 2c - b + \left(\frac{c}{8a} - \frac{1}{2}\right)^2$; de donde sacando la raiz, se tiene $z + \frac{c}{8a} - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\left(2c - b + \left(\frac{c}{8a} - \frac{1}{2}\right)^2\right)}$, y últimamente $z = \frac{1}{2} - \frac{c}{8a} \pm \sqrt{\left(2c - b + \left(\frac{c}{8a} - \frac{1}{2}\right)^2\right)}$

Prob. 1º „Un Agente de comercio recibe „para el giro, de cada Comerciante tantas „veces 15 *dob.* como asociados hay. Su ga„nancia que es tantas veces 2 *dob.* por 100 „como Mercaderes hay, multiplicada por $\frac{2}{15}$ „da de producto el número justo de los Mer„caderes: ¿ quántos son ?

Suponiendo x el número de Mercaderes, será $15x$ lo que cada uno pone, y la suma de todos $15x \times x$ ó $15x^2$: la ganancia debe ser $\frac{2x}{100} \times 15x^2 = \frac{30x^3}{100}$ ó $\frac{3x^3}{10}$; y multiplicándola por $\frac{2}{15}$, dará el número x: esto es, $\frac{3x^3}{10} \times \frac{2}{15} = x$, ó $\frac{6x^3}{150} = x$, y $6x^3 = 150x$. Pártase

por $6x$ y saldrá $x^2 = 25$: luego $x = \pm\sqrt{25} = 5$ número de Mercaderes. Será pues, $5 \times 15 = 75$ lo que cada uno ponia ; todo el fondo $75 \times 5 = 375$: y la ganancia $37\frac{1}{2}$.

2º ,,Uno compró cierto número de Cor- ,,deros en 1000 rs. á tal precio, que con el ,,mismo dinero pudo haber comprado 5 mas, ,,si se los hubieran dado 2 rs. mas baratos y ,,le hubieran sobrado 10 rs. ¿ quántos Cor- ,,deros compró, y qué le costó cada uno ?

Siendo x el número de Corderos, será $\frac{1000}{x}$ el precio de cada uno : habiendo comprado 5 mas, hubiera costado cada Cordero $\frac{1000-10}{x+5} = \frac{990}{x+5}$. Y pues este precio es menor que el otro en 2 rs., se tendrá $\frac{990}{x+5} - 2 = \frac{1000}{x}$. Quítense los quebrados y redúzcase, y saldrá $x^2 = 2500$, y de consiguiente $x = 50$, número de Corderos, cuyo precio es $\frac{1000}{50} = 20$.

3º ,,De unos amigos que se juntaron á ,,merendar, se marcharon dos quando se tra- ,,tó de pagar 144 rs. que hicieron de coste: ,,y así tocó á cada uno de los que quedaron, ,,6 rs. mas ¿ quántos eran ? "

Suponiendo x su número, será $\frac{144}{x}$ lo que cada uno debia pagar, y $\frac{144}{x-2}$ lo que efectivamente pagó, idos los dos: y pues esta cantidad es mayor que la primera en 6 rs. tendré $\frac{144}{x-2} - 6 = \frac{144}{x}$, esto es, (quitando los quebrados y reduciendo) $x^2 - 2x = 48$: añado á ambos miembros 1, cuadrado de la mitad del coeficiente de x, y será $x^2 - 2x + 1 = 48 + 1$, de donde sacando la raiz, sale $x - 1 = \pm\sqrt{49}$, y $x = 1 \pm 7$. De aqui resultan 8 y -6 por valores de x, y de ellos el 8 es el número de amigos que satisface la cuestion; pues $\frac{144}{8} = 18$ parte que debia cada uno de los 8, es menor en 6 que $\frac{144}{8-2} = 24$, parte que tocó á los 6, que quedaron.

El otro valor -6 confirma lo que dejamos dicho de las cantidades negativas; pues resuelve el problema en un caso contrario al que se propone: esto es en el supuesto de que se hubieran llegado dos mas á comer y pagar, adeudando 6 rs. ménos cada uno. Con efecto, la equacion hubiera sido $\frac{144}{x} = \frac{144}{x+2} + 6$, de donde se saca $x = -1$

$=\pm 7$, esto es, $x=6$, y $x=-8$.

4º „Salen á un mismo tiempo dos de „un Pueblo para otro distante a de leguas; „el 1º anda cada dia c leguas mas que el 2º „y llega b dias ántes que el otro, ¿ quántos „dias tarda cada uno, y quántas leguas „anda al dia ? "

Siendo y las leguas que anda el 1º cada dia, serán $\frac{a}{y}$ los dias que tardó, $y-c$ las leguas que anda el 2º y $\frac{a}{y-c}$ los dias que tardó; y puesto que los dias se diferencian en b; se tendrá $\frac{a}{y}=\frac{a}{y-c}-b$; ó $y^2-cy=\frac{ac}{b}$. Completese el cuadrado añadiendo $\frac{c^2}{4}$, y se tendrá $y^2-cy+\frac{c}{4}=\frac{ac}{b}+\frac{c^2}{4}$: de donde sacando la raiz, resulta $y=\frac{c}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{ac}{b}+\frac{c^2}{4}\right)}$.

Sea $a=99$ leguas, $c=2$, y $b=2$: será

$$y=\frac{c}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{ac}{b}+\frac{c^2}{4}\right)}=\frac{2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{99\times 2}{2}+\frac{4}{4}\right)}$$

$=1\pm\sqrt{100}=1\pm 10$: con que serán 11 las leguas que anda el 1º y $\frac{99}{11}=9$ los dias que

tardó: 9 las que anda el 2º y $\frac{99}{9}=11$, los dias del viage. Suponiendo $a=90$, $b=1$, $c=1$, se tiene $y=10$, leguas del 1º y 9 los dias que tardò; el 2º anda entonces 9 leguas y tarda 10 dias.

250 5º »Si dadas tres de las cinco cosas »que se pueden considerar en una progre- »sion, á saber primero y último término, su- »ma de todos los términos, número de ellos »y su esponente, se pide averiguar las otras »dos;“ En la progresion aritmética; se tomarán las dos equaciones $b=a+d\,(n-1)$, $s=(a+b)\frac{n}{2}$ encontradas (164 y 168): y considerando como incognitas las dos cantidades que se pidan; se despejarán en ellas por las reglas dadas (241).

Supongo,, que saliendo dos à un tiempo »de dos lugares opuestos que distan 630 le- »guas, caminando el uno 1 legua el 1.r dia, »3 el 2.º, 5 el 3.º, aumentando en los de- »mas en progresion aritmética, y caminando »el otro por dia con arreglo á los números de »la progresion, 2, 3, 4 &c. se pregunte qué »dia se encontrarán, y las leguas que anda »cada uno.

Como las dos progresiones concurren á acercar los caminantes, se deberán sumar, y se tendrá la nueva progresion ÷ 3. 6. 9. 12 &c. cuya suma s ha de ser 630, $a=3$ y $d=3$,

y habrá que buscar el número de términos n. Despejando b en las dos equaciones se tiene $b = a + dn - d$, $b = \frac{2s - an}{n}$: igualense estos valores, y resultará la equacion $a + dn - d = \frac{2s - an}{n}$ que se reduce á $n^2 + \frac{2an}{d} - n = \frac{2s}{d}$: resuelvase por las reglas dadas; y será $n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \left(\frac{a}{d} - \frac{1}{2}\right)^2\right)}$. Sustituyo ahora los valores de a, s, y d, y tendré $n = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1681}{4}} = 20$, número de dias que tardan en encontrarse los viajantes.

Para encontrar las leguas que anduvo cada uno, hay que sumar 20 términos de las dos progresiones ÷ 1. 3. 5. &c. ÷ 2. 3. 4. &c. En la 1.ª despues de haber sacado $b = a + d(n - 1) = 1 + 2(20 - 1) = 39$; sale $s = (a + b)\frac{n}{2} = (1 + 39)10 = 400$, leguas que anduvo el 1.º: y en la 2.ª donde $b = a + d(n - 1) = 2 + 1(20 - 1) = 21$; es $s = (a + b)\frac{n}{2} = (2 + 21)10 = 230$, leguas del 2.º

251 En la progresion geométrica se hace de las equaciones $b = aq^{n-1}$, $s = \frac{bq - a}{q - 1}$ sacadas (197 y 201), el mismo uso que de las dos de la aritmética.

» Un Criado infiel saca de un frasco donde

„hay 20 quartillos de buen vino, uno cada „dia, y lo reemplaza con otro de agua: al cabo „de 4 dias ¿quánto vino quedará en el frasco?

En el 1.r dia quedan $20-1=19$ q.llos En el 2.º quedan $19-\frac{19}{20}=\frac{19\times 20-19}{20}=\frac{19(19+1)-19}{20}=\frac{19\times 19}{20}=\frac{19^2}{20}$. En el 3.º quedan $\frac{19^2}{20}-\frac{\frac{19^2}{20}}{20}=\frac{19^2}{20}-\frac{19^2}{20^2}=\frac{19^2\times 20-19^2}{20^2}=\frac{19^2(19+1)-19^2}{20^2}=\frac{19^3}{20^2}$; luego la progresion $\div 19:\frac{19^2}{20}:\frac{19^3}{20^2}$ &c. expresa el vino que va quedando cada dia. De consiguiente si en la equacion $b=aq^{n-1}$ se sustituye en lugar de a, 19; por q, $\frac{19}{20}$; y 4 en lugar de n, será $b=19\left(\frac{19}{20}\right)^3=\frac{19^4}{20^3}=\frac{130321}{8000}$ $=16\frac{2321}{8000}$, porcion de vino que queda despues del 4.º dia.

Si se preguntase al cabo de quántos dias quedaria igual porcion de agua que de vino; seria $a=19$, $q=\frac{19}{20}$, y $b=10$: luego en lugar de $b=aq^{n-1}$ ó $bq=aq^n$, se tendria $10\times\frac{19}{20}=19\left(\frac{19}{20}\right)^n$, que se reduce dividiendo por 19, á $\frac{1}{2}=\left(\frac{19}{20}\right)^n$, equacion que directamente no se puede resolver, por no poderse despejar n sino subiendo $\frac{19}{20}$ á sus potencias hasta componer $\frac{1}{2}$. Pero por los logarítmos se tie-

ne (213) $nL(\frac{19}{20})=L\frac{1}{2}$; y $n=\frac{L\frac{1}{2}}{L\frac{19}{20}}=13\frac{114368}{222764}$.

252 Prob. 69 se pide explicar los fun-»damentos y la práctica de la *regla de Interés*.

Se llama *interés* la ganancia que se saca del dinero prestado, dado á censo ó puesto á comercio: y será *simple* quando gana solo la cantidad ó principal empleado, é interés *doble* ó *compuesto* quando las ganancias se juntan al principal para producir ganancias.

1º »Dado un capital, el tiempo que "está puesto á ganancias, y lo que se ha de »pagar de cada 100; hayase de encontrar lo »que se debe al cabo de dicho tiempo."

Si llamamos p el capital, t el tiempo, r el interés que da un real cada año, y s la suma que se busca; dirémos, *si un real da* r *de interés en un año ¿quántos dará el principal* p? ó $1:r::p:pr$; y será pr lo que produce p de interés cada año: digase despues, *si en* 1 *año* p *da* pr *¿en t de años quánto dará?* ó $1:pr::t:prt$. Luego prt son los intereses que da p en el tiempo t; júntense con el principal p, y saldrá la suma que se pide ó $s=p+prt$. Despejese en esta equacion p, r, y t; y se tendrá $p=\frac{s}{1+rt}$, $r=\frac{s-p}{pt}$, $t=\frac{s-p}{pr}$; en donde conociendo tres de las quatro cantidades p, r, t, s, será facil averiguar la otra.

„ Supongamos que un Usurero ha pres-
„ tado 15600 rs. con la condicion de recibir
„ 8 rs. de cada 100 de ganancia cada año, lo
„ que se llama á 8 por $\frac{0}{0}$; y que se pregunta,
„ quánto debe percibir al fin de 5 años por
„ capital é intereses."

En este caso $p=15600$, $t=5$, y r se encontrará diciendo, 100 *reales dan* 8, 1 *real quanto dará*? ó $100: 8 :: 1 : \frac{8}{100} = \ldots 0,08$: será pues, $s=p+prt=15600+15600\times 5\times 0,08=21840$ rs. suma que debe percibir. Si dada esta suma pagada por 5 años á 8 por 100, se pidiese el capital que la ha producido; se tendria $p=\frac{s}{1+rt}=\frac{21840}{1+5\times 0,8}=15600$. Del mismo modo se encontrarán las otras dos cantidades.

2.º „Uno que paga de renta cada año a, „deja de pagarla t de años con la condicion „de dar r de interés por cada real del dinero „atrasado: ¿quánto debe al cabo de t de años?"

Al fin del 1.r año no debe interés, por no haber renta atrasada: al fin del 2.º año debe el interés ar de una renta a atrasada, pues si 1 real da r, a produce ar: al cabo del 3.r año debe $2ar$ de intereses, al cabo del 4.º $3ar$.... y al fin del año t, $(t-1)ar$. Todos estos intereses forman la progresion aritmética $\div 0.\ ar.\ 2ar.\ 3ar\ldots\ldots(t-)ar$ cuya

suma es $\frac{atr(t-1)}{2}$ (168) juntesele el número at de rentas caidas en t años, y será $s=$ $\frac{atr(t-1)}{2}+at=\frac{atr(t-1)+2at}{2}=\left(\frac{r(t-1)+2}{2}\right)\times at$ lo que se debe al cabo de t años por rentas é intereses. Despejando a, t y r en esta equacion, se tiene $a=\frac{2s}{r(t-1)+2t}$: $t=\frac{r-2}{2r}\pm$ $\sqrt{\left(\frac{2s}{ar}+\left(\frac{2-r}{2r}\right)^2\right)}$: $r=\frac{2s-2at}{at(t-1)}$

„Uno que paga 100 dob. cada año deja „de pagarlos 8 años; con la condicion de dar „al cabo de este tiempo las ocho rentas con „los intereses á razon de 5 por 100 ¿quánto „debe pagar?"

Sustituyendo los valores en $s=\left(\frac{r(t-1)+2}{2}\right)\times at$, sale $s=\left(\frac{0{,}05\times7+2}{2}\right)\times800=940$. Si se diese esta suma en pago de 100 dob. retenidos 8 años, y se pidiese el interés que ha producido cada 100; se tendrá $r=\frac{2s-2at}{at(t-1)}=\frac{1880-1600}{800\times7}$ $=0{,}05$; y si 1 real da 0,05; 100 rs. darán 5, interés que se busca.

3.° „Dado un capital, el interés anual, „y el número de años que está ganando, „hallar quánto monta el capital y las ga-

»nancias á interés compuesto«

Sea a el capital, t el tiempo, y r el interés de 1 real; será 1 *real* $+ r$ que llamarémos R, lo que se deberá al cabo de un año por 1 real y su interés. En el 2.º año entra ganando como principal 1 *real* $+ r$ ó R, con que diciendo, 1 *da* R, R ¿*quanto dará*? se tendrá R^2 al fin del 2.º año por capital y ganancias: del mismo modo se hallará R^3 por lo que se debe al fin del 3.r año.... y al cabo del año t, R^t. Diráse despues, *si uno da* R^t, *a que dará*? ó $1 : R^t :: a : aR^t$; luego a produce de principal y ganancias al cabo de t años

aR^t : y será $s = aR^t$, $a = \frac{s}{R^t}$, $R = \sqrt[t]{\frac{s}{a}}$.

y $t = \frac{Ls - La}{LR}$.

»Si se pregunta la suma que producen »20000 *pes.* á 5 por 100 al cabo de 6 años, »entrando á ganancias el interés:« se tendrá $a = 20000$, $t = 6$, $r = 0{,}05$, $R = 1{,}05$: y de consiguiente $s = aR^t = 20000 \times (1{,}05)^6 = 20000 \times 1{,}3401 = 26802$ *pes.*

4.º »Dada una renta que se paga cada »año, los años que deja de pagarse, y el in»terés; hallar lo que se debe al fin de dicho »tiempo por los atrasos y ganancias á interés »compuesto.«

Sea a la renta anual, t el tiempo que

deja de pagarse, r el interés de 1 *real*, $1+r$ ó R un real y su interés, y s la suma. Al fin del 1.r año se debe solo la renta a: al fin del 2.o se debe la renta a de este año, y la renta é interes del 1.o que es aR; porque si 1 da R, a dará aR: con que se debe $a+aR$: al fin del 3.o por la misma cuenta se debe $a+aR+aR^2$; pues si 1 da R, $a+aR$ dará $aR+aR^2$ que con la renta del 3.r año compone $a+aR+aR^2$: al fin del 4.o se deberá $a+aR+aR^2+aR^3$.... y al cabo del año t, $a+aR+aR^2+aR^3+.....aR^{t-1}$, esto es, .. $a(1+R+R^2+R^3+....R^{t-1})$. La suma de esta progresion geométrica es (201)...............
$\frac{R \times R^{t-1}-1}{R-1}=\frac{R^t-1}{r}$: luego la deuda que se busca, será $s=\frac{R^t-1}{r}\times a$: de donde tambien se saca $a=\frac{rs}{R^t-1}$; $R=\sqrt[t]{\left(\frac{rs}{a}+1\right)}$: y $t=\frac{L(rs+a)-La}{LR}$.

„Si la renta anual es 2400 *pes.* y se „retiene 8 años con condicion de pagar 4 „por 100 á interés compuesto; se tendrá $s=\frac{R^t-1}{r}\times a=\frac{(1{,}04)^8-1}{0{,}04}\times 2400=22140$ *pes.* cantidad que se pide.

253 De los dos valores que tiene toda

incognita de 2.º grado, hemos contado solo con el que satisface derechamente la cuestion: porque el otro, ó no pertenece á ella, ó la resuelve en diferentes circunstancias. Sin embargo, hay casos en que dichos dos valores resuelven el problema de dos maneras diferentes; y uno de ellos es el siguiente.

7.º „Uno vendió un caballo en 24 *dobl.* „perdiendo en la venta, tanto por 100 como „le habia costado ¿en quánto lo compró?

Si llamamos x lo que le costó ó lo que perdió por 100, dirémos, *si de* 100 *quedan* 100−x; de x, importe del caballo, *quedarán* $\frac{(100-x)\times x}{100}$: y como esto ha de componer 24; tendrémos $24=\frac{(100-x)\times x}{100}$, ó $x^2-100x=-2400$; donde $x=50\pm10$, esto es, $x=60$, y $x=40$, valores que resuelven ambos el problema.

254 Tambien se resuelven como las de 2.º grado las equaciones de esta forma...... $x^{2s}\pm px^s=q$: es decir, las que tienen solos dos términos con la incognita, y el esponente del uno es duplo del esponente del otro: como $x^4+ax^2=b$, $x^6+cx^3=t$ &c. Con efecto, si en la equacion $x^4+ax^2=b$ se completa el cuadrado asi, $x^4+ax^2+\frac{a^2}{4}=b+\frac{a^2}{4}$,

y se saca la raiz cuadrada de ambos miembros; resulta $x^2 + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(b + \frac{a^2}{4}\right)}$, ó $x^2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(b + \frac{a^2}{4}\right)}$: vuelvase á sacar de ambos miembros la raiz cuadrada, y se tendrá finalmente $x = \pm\sqrt{\left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{(b + \frac{a^2}{4})}\right)}$

Extraccion de las raices parte racionales y parte inconmensurables.

255 La equacion general $x^{2s} + px^s = q$ resuelta conforme acabamos de enseñar, da $x = \sqrt[s]{(-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)})}$: expresion que muchas veces puede reducirse á otra mas sencilla estrayendo de ella la raiz como vamos á decir. Sea 1.º $s = 2$, y tratemos de estraer la raiz cuadrada de $\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$. Supongamos este binomio $m + \sqrt{n}$, y que su raiz cuadrada sea $\sqrt{x} + \sqrt{y}$: será $\sqrt{(m + \sqrt{n})} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$; y cuadrando, $m + \sqrt{n} = x + y + 2\sqrt{xy}$. Igualemos, como es natural, las cantidades racionales entre sí, y lo mismo las radicales; será $x + y = m$, y $2\sqrt{xy} = \sqrt{n}$. Cuadrando ahora ambas equaciones, y restando despues la 2.ª de la 1.ª; se tendrá $x^2 - 2xy + y^2 = m^2 - n$, donde sacando la raiz es $x - y = \sqrt{(m^2 - n)}$: luego x, y, serán conmensurables quando $m^2 - n$ sea un cuadrado. Si esta últi-

ma equacion se suma con la anterior $x+y=m$, resulta $2x=m+\sqrt{(m^2-n)}$, ó $x=\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}$. Restando dichas equaciones se tiene $2y=m-\sqrt{(m^2-n)}$, y $y=\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}$. Será pues, $\sqrt{(m+\sqrt{n})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)})}+\sqrt{(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)})}$: y por la misma razon $\sqrt{(m-\sqrt{n})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)})}-\sqrt{(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)})}$.

„Si se pidiesen dos números cuyo pro„ducto es 105, y la suma de sus cuadrados „274; seria $xy=105$, $x^2+y^2=274$: la primera equacion da $y=\frac{105}{x}$, cuyo valor sustituido en la segunda, la convierte en esta $x^2+\frac{(105)^2}{x^2}=274$, y $x^4+(105)^2=274x^2$, ó $x^4-274x^2=-(105)^2$: de donde se saca $x^2=137\pm\sqrt{7744}$, y $x=\sqrt{(137\pm\sqrt{7744})}$.

Aquí es $m=137$, $\sqrt{n}=\sqrt{7744}$, $n=7744$: $\sqrt{(m^2-n)}=\sqrt{(18769-7744)}=\sqrt{11025}=105$: de consiguiente $\sqrt{(m\pm\sqrt{n})}=\sqrt{(137\pm\sqrt{7744})}=\sqrt{(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)})}\pm\sqrt{(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)})}=\sqrt{\left(\frac{137}{2}+\frac{105}{2}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{137}{2}-\frac{105}{2}\right)}=11\pm4$, y x valdrá 15 ó 7. En el primer caso es $y=7$, y en el segundo $y=15$: luego 15 y 7 son los números que se piden.

Para sacar la raiz del binomio $7+\sqrt{48}$; en donde $m=7$, $n=48$; se tiene $\sqrt{(m^2-n)}=1$: y sustituyendo estos valores en la fórmula; resulta $\sqrt{(7+\sqrt{48})}=\sqrt{(\frac{7}{2}+\frac{1}{2})}+\sqrt{(\frac{7}{2}-\frac{1}{2})}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$.

En el binomio $4+2\sqrt{3}$, que se reduce á $4+\sqrt{12}$; es $m=4$, $n=12$, $\sqrt{(m^2-n)}=2$: y sustituyendo, resulta $\sqrt{(4+2\sqrt{3})}=1+\sqrt{3}$ ó $-1-\sqrt{3}$. En $2\sqrt{-1}$, que no tiene parte racional, es $m=0$, $n=-4$, y $\sqrt{(m^2-n)}=2$: luego $\sqrt{2\sqrt{-1}}=1+\sqrt{-1}$.

256 Supongamos ahora $s=3$, y la cantidad $\sqrt[3]{(m+\sqrt{n})}$ podrá tener una raiz de esta forma $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{t}$ (no se supone $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, porque esta tendria dos radicales cuadrados en su cubo). Será pues, $\sqrt[3]{(m+\sqrt{n})}=(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{t}$, y subiendo al cubo, $m+\sqrt{n}=x^3t+3x^2t\sqrt{y}+3xty+ty\sqrt{y}$. Igualando entre si los términos racionales, y los irracionales de ambas partes; resulta $m=x^3t+3xty$, $\sqrt{n}=(3x^2t+ty)\sqrt{y}$: cuadrando las dos, y restando del primer resultado $m^2=x^6t^2+6x^4t^2y+9x^2t^2y^2$, el segundo $n=9x^4t^2y+6x^2t^2y^2+t^2y^3$; se tiene $m^2-n=x^6t^2-3x^4t^2y+3x^2t^2y^2-t^2y^3$, ó multiplicando por t, $t(m^2-n)=x^6t^3-3x^4t^3y+3x^2t^3y^2-t^3y^3$: saquese la raiz cúbica de ambos miembros y resulta $\sqrt[3]{t(m^2-n)}=x^2t-ty$ ó $\frac{\sqrt[3]{(m^2-n)t}}{t}=$

$x^2 - y$. Luego para que $x^2 - y$ sea racional, ó para que $m + \sqrt{n}$ tenga raiz cúbica exâcta, es menester que $(m^2 - n)t$ sea cubo perfecto: para lo qual sirve la indeterminada t, que se supone 1 quando $m^2 - n$ es cubo exâcto, y quando no lo es, se le da el valor conveniente para que lo sea.

Supongamos para abreviar, $\frac{\sqrt[3]{(m^2-n)t}}{t} = a$: será $x^2 - y = a$, y de consiguiente $y = x^2 - a$. Puesto este valor en la equacion $m = x^3 t + 3xty$, la reduce á $4tx^3 - 3atx - m = 0$, en la qual se sacará el valor de x por medio de sus divisores conmensurables, que los tendrá siempre que x, y puedan ser racionales, ó siempre que la cantidad propuesta tenga alguna raiz de la forma $(x + \sqrt{y})\sqrt[3]{t}$.

Sirva de primer eg. la cantidad $\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})}$, en la qual $m = 20$, $\sqrt{n} = 14\sqrt{2}$, y de consiguiente $m^2 = 400$, y $n = 392$: luego $m^2 - n = 8$, que es cubo perfecto, y por lo mismo $t = 1$. Tendremos pues, $\sqrt[3]{\frac{(m^2-n)t}{t}} = \sqrt[3]{8} = a$, y la equacion $4tx^3 - 3atx - m = 0$, se mudará en $4x^3 - 6x - 20 = 0$, cuyo divisor es $x - 2$; luego $x = 2$, $y = x^2 - a = 4 - 2 = 2$: y $\sqrt[3]{(2 + 14\sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2}$.

Sea el segundo eg. $\sqrt[2]{(52 + 30\sqrt{3})}$, en el

que $m=52$, $\sqrt{n}=30\sqrt{3}$, y de consiguiente $m^2-n=4$: luego para que $\sqrt[3]{(m^2-n)t}$ sea cubo perfecto, es menester suponer $t=2$, y entónces $\frac{\sqrt[3]{(m^2-n)t}}{t}$ se reduce á $\frac{\sqrt[3]{8}}{2}=1$, y la equacion $4tx^3-3atx-m=0$ viene á ser $8x^3-6x-52=0$. Su divisor conmensurable es $x-2$, y como la equacion $y=x^2-a$ da $y=3$; será $\sqrt[3]{(52+30\sqrt{3})}=2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3}$. Siguiendo este método, que se aplica igualmente á los radicales que contienen cantidades imaginarias; se podrán sacar fórmulas para la estraccion de las raices superiores á las de tercer grado.

EQUACIONES SUPERIORES.

Consideraciones generales sobre su formacion.

257 Hemos visto que la incognita tiene un valor ó una raiz en las equaciones de 1.er grado, dos en las de 2.o y es de discurrir que deberá tener tres en las de 3.o, quatro en las de 4.o, ... y m en las de grado m. Esto vamos á ver reflexionando sobre las equaciones de todos grados, al mismo tiempo que hagamos observaciones que nos conduzcan á su resolucion.

Sean a y b los valores ó raices de x; de suerte que sea $x=a$, $x=b$, ó $x-a=0$, $x-b=0$: si multiplicamos $x-a$ por $x-b$ resultará.......... $x^2 \left.\begin{matrix}-a\\-b\end{matrix}\right\} x+ab=0$, equacion de 2º grado, cuyas raices ó valores de x son a y b: y en la que partiendo por $x-a=0$, sale $x-b=0$, y al contrario.

Si se multiplican entre si $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$; resulta la equacion de 3.er grado......... $x^3 \left.\begin{matrix}-a\\-b\\-c\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}+ac\\+bc\\+ab\end{matrix}\right\} x-abc=0$ en la que a, b, c son los tres valores de x; y que puede resolverse en tres factores de 1.er grado ó en dos, uno de 1º y otro de 2º grado.

Ultimamente, la equacion de 4.º grado

$$\ldots\ldots x^4 \left.\begin{matrix}-a\\-b\\-c\\-d\end{matrix}\right| x^3 \left.\begin{matrix}+ab\\+ac\\+bc\\+ad\\+bd\\+cd\end{matrix}\right| x^2 \left.\begin{matrix}-abc\\-abd\\-acd\\-bcd\end{matrix}\right| x+abcd=0$$

formada de $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, $x-d=0$, tiene quatro raices, y se puede resolver en quatro factores de 1.er grado ó en dos de 2º ó en uno de 3º y otro de 1º

258 Observando los términos de estas equaciones ó de otras qualesquiera mas elevadas, se ve en primer lugar, que el 1.º es la incognita elevada á una potencia igual al nú-

mero de sus raices, y que en los demas términos va disminuyendo de una unidad. El coeficiente del 2.º término es la suma de todas las raices mudado el signo: el coeficiente del 3.º es la suma de los productos de todas las raices tomadas dos á dos: el del 4.º la suma de los productos de dichas raices tomadas tres á tres, y así de los siguientes hasta el último que es producto de todas las raices

259 2.º En dichas equaciones en que todas las raices son positivas, alternan los signos + y —: y si hubiesen sido negativas, multiplicando $(x+a)(x+b)(x+c)$ &c. todos los términos hubieran tenido unos mismos signos. Luego en toda equacion de raices reales hay tantas raices positivas como alternativas de signos + y —; y tantas negativas como repeticiones de un mismo signo. De consiguiente para convertir las raices positivas de una equacion en negativas y al contrario, basta mudar los signos de los términos pares 2.º 4.º 6.º &c.

260 Esta regla falla en las raices imaginarias: la equacion $x^3+px^2+3p^2x-q=0$, por egemplo, que debe tener una raiz positiva y dos negativas por una mutacion de signos y dos sucesiones, si se multiplica por $x-2p=0$, que es otra raiz positiva, deberia producir una equacion con dos positivas y dos negativas: y sin embargo el producto

$x^4 - px^3 + p^2x^2 - (6p^3 - q)x + 2pq = 0$, atendidos los signos, espresa las quatro raices positivas: luego las raices que en la primera equacion aparecian negativas, y en la segunda positivas, son imaginarias.

261 3.º Pues que el coeficiente del 2.º término de una equacion es la suma de sus raices (258); siempre que falte dicho termino, tendrá la equacion raices positivas y negativas, y la suma de las unas será igual á la de las otras.

4.º Asimismo habrá á lo ménos una raiz igual á cero en la equacion que no tenga último término: pues es este el producto de todas las raices (258): y asi la equacion $x^3 + 5x^2 - 3x = 0$ puede dividirse por $x = 0$.

262 Supongamos ahora que todas las raices de una equacion sean iguales á b, y que el número de ellas sea m: deberá ser su 1.er término x^m; el 2.º x^{m-1} con el coeficiente mb, que es la suma de todas sus raices, esto es, mbx^{m-1}: el 3.er término ha de ser x^{m-2} multiplicado por la suma de todos los productos de las raices tomadas dos á dos: y como cada producto es b^2, y el número de ellos ha de ser $m \times \frac{m-1}{2}$ (207); será dicho término $\frac{m \times m-1}{2} b^2 x^{m-2}$. En el 4.º término ha de multiplicar á x^{m-3} la suma de los productos b^3

de las raices tomadas tres á tres, que es $\frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3}$; será pues $\frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} b^3 x^{m-3}$ y asi hasta el último, que ha de ser b^m producto de todas las raices. Luego dicha equacion $(x-b)^m = 0$ será $x^m + \frac{m}{1} b x^{m-1} + \frac{m \times m-1}{1 \times 2} b^2 x^{m-2} + \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} b^3 x^{m-3} + \&c. + b^m = 0$. Esta espresion es justamente la fórmula del binomio de Newton, cuya formacion ofrecimos esplicar (140).

263 Volviendo á las equaciones, veamos cómo se trasforma la siguiente $x^3 + \frac{ax^2}{b} + \frac{cx}{d} + \frac{e}{t} = 0$ en otra que no tenga quebrados. Para esto harémos $x = \frac{y}{bdt}$, y sustituyendo este valor en la equacion propuesta, tendrémos $\frac{y^3}{b^3 d^3 t^3} + \frac{ay^2}{b^3 d^2 t^2} + \frac{cy}{bdt^2} + \frac{e}{t} = 0$, en donde multiplicando por $b^3 d^3 t^3$ resulta $y^3 + adty^2 + b^2 cd^2 t^2 y + b^3 d^3 t^2 e = 0$: equacion que no tiene fracciones, y en la qual averiguadas las raices de y, se tendrán las de x partiéndolas por bdt.

264 Tambien facilita la resolucion de las

equaciones el quitarlas su 2º término. Tomemos para este efecto la equacion general $y^m \pm ay^{m-1} \pm by^{m-2} \pm$ &c. $= 0$: supongamos $y = x + t$ siendo t de tal valor que haga desaparecer el 2º término. Sustituyase $x + t$ en la equacion general, y se mudará en la siguiente. . . . .

$$\left.\begin{array}{l} x^m + mtx^{m-1} + \frac{mxm-1}{2}t^2x^{m-2} + \&c. \\ \pm a\,x^{m-1} \pm (m-1)\,at\,x^{m-2} \pm \&c. \\ \pm \ldots\ldots\ bx^{m-2} \end{array}\right\} = 0$$

Para que en ella sea cero el 2.º término, deberá ser $mtx^{m-1} \pm ax^{m-1} = 0$, ó $mt = \pm a$, y $t = \pm \frac{a}{m}$: luego *desaparecerá el 2º término de una equacion suponiendo su incognita igual á otra ménos ó mas el coeficiente de su 2º término dividido por el esponente del 1º restándole quando es positivo, y sumándole quando es negativo.*

Si se tuviese la equacion $y^3 + by^2 + cy + d = 0$; se hará $y = x - \frac{b}{3}$; y será la equacion trasformada, $x^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)x + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = 0$, sin 2º término. $x^4 - 2x^3 - 4 = 0$ se trasforma haciendo $x = y + \frac{2}{4}$, en $y^4 - \frac{3}{2}y^2 - y - \frac{67}{16} = 0$. Podria igualmente quitarse el 3º 4º

&c. términos de una equacion; pero como entónces resultan radicales en la trasformada, embaraza este arbitrio en lugar de facilitar la operacion.

Resolucion de las equaciones de tercer grado.

265 Tratemos ya de resolver una equacion de tercer grado, que supondrémos sin 2º término: y sea $x^3 + px + q = 0$. Si hacemos $x = u + z$: se convertirá en esta $u^3 + 3u^2z + 3uz^2 + z^3 + pu + pz + q = 0$: en la que sea u ó z tal que $u^3 + z^3 + q = 0$, y de consiguiente $3u^2z + 3uz^2 + pu + pz = 0$, que da partiendo por $u+z$: $3uz + p = 0$, y $u = -\frac{p}{3z}$.

Sustituido este valor de u en $u^3 + z^3 + q = 0$, la muda en $z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$, ó $z^6 + qz^3 = \frac{1}{27}p^3$: equacion de 6.º grado que resuelta por el método de las de 2.º (254) da $z^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$: y de consiguiente $z = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}$...... Puesto este valor en la equacion $u^3 + z^3 + q = 0$, ó $u = \sqrt[3]{(-z^3 - q)}$, se tiene $u = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q \mp \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}$: luego $u + z = x = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}$ á que se reducen los dos

casos de $+$ y $-$.

Para sacar los otros dos valores de x, hay que dividir la equacion $x^3+px+q=0$ por el que acabamos de encontrar. Supóndremos pues, para simplificar la operacion, $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}=m$, y $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}=n$; será $x=m+n$, $mn=-\frac{1}{3}p$, $m^3+n^3=-q$, y de consiguiente $p=-3mn$, y $q=-m^3-n^3$. Sustituidos estos valores en la equacion $x^3+px+q=0$, queda reducida á $x^3-3mnx-m^3-n^3=0$; que dividida por su factor $x=m+n$ ó $x-m-n=0$, produce $x^2+(m+n)x+m^2+n^2-mn=0$: equacion de 2.º grado en la que, $x=-\frac{1}{2}(m+n)\pm\frac{1}{2}(m-n)\times\sqrt{-3}$. Luego las tres raices de la propuesta son $x=m+n$, $x=-\frac{1}{2}(m+n)+\frac{1}{2}(m-n)\sqrt{-3}$, $x=-\frac{1}{2}(m+n)-\frac{1}{2}(m-n)\sqrt{-3}$: en donde solo falta poner en lugar de m, n sus valores.

266 La primera raiz $m+n$ es real, y las otras dos son imaginarias quando m y n son cantidades reales; ó quando es real $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$: lo que se verifica 1.º quando p es positivo: 2.º quando en el caso de ser negativo, ó de ser la equacion $x^3-px\pm q=0$, es $\frac{1}{4}q^2$ mayor que $\frac{1}{27}p^3$. Veamos lo que sucede quando $\frac{1}{4}q^2$ es menor que $-\frac{1}{27}p^3$.

267 En este caso suponiendo para hacer el cálculo mas sencillo, $r=\frac{1}{2}q$, y $\sqrt{(-\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}=t\sqrt{-1}$, las tres raices se mudan

en $x=\sqrt[3]{(-r+t\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(-r-t\sqrt{-1})}$, $x=-\frac{1}{2}(\sqrt[3]{(-r+t\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(-r-t\sqrt{-1})})+\frac{1}{2}\sqrt{-3}(\sqrt[3]{(-r+t\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(-r-t\sqrt{-1})})$; $x=-\frac{1}{2}(\sqrt[3]{(-r+t\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(+r-t\sqrt{-1})})-\frac{1}{2}\sqrt{-3}(\sqrt[3]{(-r+t\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(-r-t\sqrt{-1})})$. Reduzcanse á serie $\sqrt[3]{(r\pm t\sqrt{-1})}=(r\pm t\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ (153); y será $(-r+t\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=-r^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}r^{-\frac{2}{3}}t\sqrt{-1}-\frac{1}{9}r^{-\frac{5}{3}}t^2-\frac{5}{81}r^{-\frac{8}{3}}t^3\sqrt{-1}+\frac{10}{243}r^{-\frac{11}{3}}t^4+\frac{22}{729}r^{-\frac{14}{3}}t^5\sqrt{-1}$-&c.

Y $(-r-t\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=-r^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}r^{-\frac{2}{3}}t\sqrt{-1}-\frac{1}{9}r^{-\frac{5}{3}}t^2+\frac{5}{81}r^{-\frac{8}{3}}t^3\sqrt{-1}-\frac{10}{243}r^{-\frac{11}{3}}t^4-\frac{22}{729}r^{-\frac{14}{3}}t^5\sqrt{-1}$-&c.

Sumo ahora estas dos series, y será el 1.er valor $x=-2r^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{t^2}{9r^2}-\frac{10t^4}{243r^4}+\ldots\ldots\frac{154t^6}{6561r^6}-\&c.\right)$ poniendo al principio $2r^{\frac{1}{3}}$ comun á todos los términos. En los otros valores restando la segunda serie de la primera, despues de haberlas multiplicado por $\sqrt{3}$, resulta $x=r^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{t}{9r^2}-\frac{10t^4}{243r^4}\ldots\ldots+\frac{154t^6}{6561r^6}-\right.$

&c. $\Big) - \frac{t\sqrt{3}}{3r^{\frac{2}{3}}}\Big(1 - \frac{5t^2}{27r^2} + \frac{22t^4}{243r^4} - \text{\&c.}\Big)$

$$y\ x = r^{\frac{1}{3}}\Big(1 + \frac{t^2}{9r^2} - \frac{10t^4}{243r^4} + \frac{154t^6}{6561r^6} - \text{\&c.}\Big) +$$

$\frac{t\sqrt{3}}{3r^{\frac{2}{3}}}\Big(1 - \frac{5t^2}{27r^2} + \frac{22t^4}{243r^4} - \text{\&c.}\Big)$: valores en cuyos términos no hay cantidades imaginarias.

Luego quando $\frac{1}{27}p^3$ es negativo y mayor que $\frac{1}{4}q^2$, los tres valores de x son reales: aunque hasta ahora no se ha encontrado método alguno para espresarlos exâctamente, y por eso se ha dado á este caso el nombre de *irreductible*.

De consiguiente qualquiera equacion de 3.er grado tiene siempre una raiz que se puede espresar exâctamente, y dos imaginarias quando p es positivo, ó quando siendo negativo, $\frac{1}{27}p^3$ es menor que $\frac{1}{4}q^2$. Al contrario, si en el caso de ser p negativo, fuese $\frac{1}{27}p^3$ mayor que $\frac{1}{4}q^2$, todas las tres raices serán reales, pero no se podrán espresar sino por séries infinitas.

„Si se pidiese un número de cuyo cubo „restando el producto de dicho número por „36, resultan 91"; tendriamos la equacion $x^3 - 36x = 91$: en la que $\frac{1}{4}q^2 = \frac{8281}{4}$ es mayor que $\frac{1}{27}p^3 = -1728 = -\frac{6912}{4}$: luego tendrá una raiz real, y dos imaginarias. La pri-

mera se saca sustituyendo en la formula $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}+\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q-\frac{1}{4}\sqrt{q^2+\frac{1}{27}p^3})}$ los valores de p y q; pues resulta $\sqrt[3]{\left(\frac{91}{2}+\frac{37}{2}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{91}{2}-\frac{37}{2}\right)}=4+3=7$ que satisface la pregunta. Las imaginarias son faciles de encontrar. Quando la equacion dada tiene 2º término, se comienza su resolucion haciéndole desaparecer (264): y averiguado el valor de la nueva incognita, se saca despues el de la primera.

268 Si en el caso irreductible el valor real de x es un número entero; deberá ser $-\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}$ un cubo perfecto, cuya raiz constará de una parte real que llamo m, y de otra imaginaria que supongo n. Será pues $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$ $=m+n$, y $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q-\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$ $=m-n$: y la suma de las dos ó $x=m+n+m-n=2m$: y en este caso se tendrá el valor exâcto de x duplicando la parte real de la raiz cúbica de $-\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}$.

En la equacion $x^3-39x-70=0$ por egemplo, en donde $p=-39$, $q=-70$; se tiene $-\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}=35+$

$18\sqrt{-3}$; y siendo las tres raices cúbicas de esta cantidad $-1+2\sqrt{-3}$, $\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-3}$, cuyas partes reales son -1, $\frac{7}{2}$ y $-\frac{5}{2}$; serán las tres raices de x en la equacion propuesta -2, 7, y -5.

Finalmente, en la equacion $x^3-17x-4=0$, se tiene $p=-17$, $q=-4$; y $-\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}$ se reduce á $2+\frac{31}{3}\sqrt{-\frac{5}{3}}$, cuyas raices cúbicas son $-2+\sqrt{-\frac{5}{3}}$, $1+\frac{1}{2}\sqrt{5}+\sqrt{\left(-\frac{41}{12}+\sqrt{5}\right)}$, $1-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\sqrt{\left(-\frac{41}{12}-\sqrt{5}\right)}$: luego las raices de la equacion son -4, $2+\sqrt{5}$ y $2-\sqrt{5}$.

Resolucion de las equaciones de 4.º grado.

269 Hayase de resolver la equacion general $x^4+px^2+qx+r=0$ á que puede reducirse qualquier otra despues de habérsele quitado su 2º término. Para esto, consideremosla formada de las dos equaciones de 2º grado $x^2+sx+t=0$, $x^2-sx+u=0$, en las que s, t, u son indeterminadas, y su forma es tal que multiplicadas producen una equacion sin 2º término. En efecto, el producto es $x^4+(t-s^2+u)x^2+(su-st)x$..

$+tu=0$, que comparada término por término con la general, da $p=t-s^2+u$, $q=su-st$, y $r=tu$. De la 1ª sale $t+u=s^2+p$: y de la 2ª $t-u=-\frac{q}{s}$; luego (238) $t=\frac{s^2+p}{2}-\frac{q}{2s}$, y $u=\frac{s^2+p}{2}+\frac{q}{2s}$. Sustituidos estos valores en $r=tu$, resulta $r=\frac{(s^2+p)^2}{4}-\frac{q^2}{4s^2}$, ó $s^6+2ps^4+(p^2-4r)s^2-q^2=0$, equacion de 6º grado que se reduce á 3º haciendo $s^2=z$; pues se muda en $z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0$, que se llama *la reducida*, y por la que se averigua el valor de s.

Ponganse ahora los valores de t, u en las equaciones $x^2+sx+t=0$, $x^2-sx+u=0$; y tendrémos $x^2+sx+\frac{s^2+p}{2}-\frac{q}{2s}=0$, $x^2-sx+\frac{s^2+p}{2}+\frac{q}{2s}=0$, cuyas raices $x=-\frac{1}{2}s\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2s}\right)}$, y $x=\frac{1}{2}s\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2s}\right)}$, que se pueden expresar todas por la formula $x=\pm\frac{1}{2}s\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2s}\right)}$, dan los quatro valores

siguientes de x.. $x = \frac{1}{2}s + \sqrt{\left(-\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2s}\right)}$, $x = \frac{1}{2}s - \sqrt{\left(-\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2s}\right)}$, $x = -\frac{1}{2}s + \sqrt{\left(-\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2s}\right)}$, $x = -\frac{1}{2}s - \sqrt{\left(-\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2s}\right)}$; en los que sustituyendo el valor de s, se tienen finalmente los de la equacion $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

270 Supongamos para abreviar, $m = \frac{1}{2}s$, $n = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2s}\right)}$, $f = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2s}\right)}$; y serán las quatro raices $x = m + n$, $x = m - n$, $x = -m + f$, $x = -m - f$: ó $x - m - n = 0$, $x - m + n = 0$, $x + m - f = 0$, $x + m + f = 0$: multipliquense entre sí, y producirán la equacion $x^4 - (2m^2 - n^2 - f^2)x^2 + (2mf^2 - 2mn^2)x + m^4 - m^2n^2 - m^2f^2 + n^2f^2$: que comparada con la general $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, da $p = -2m^2 - n^2 - f^2$, $q = 2mf^2 - 2mn^2$, $r = m^4 - m^2n^2 - m^2f^2 + n^2f^2$: ponganse estos valores en la reducida $s^6 + 2ps^4 + (p^2 - 4r)s^2 - q^2 = 0$, y la trasformará en. . . . .

$$
\begin{array}{r|r|l|l}
s^6 - 4m^2 & + 8m^2n^2 & + 8m^2n^2f^2 & \\
- 2n^2 & s^4 + 8m^2f^2 & - 4m^2n^4 & = 0 \\
- 2f^2 & + n^4 & s^2 \; - 4m^2f^4 & \\
 & - 2n^2f^2 & & \\
 & + f^4 & &
\end{array}
$$

y como los tres factores de esta equacion son s^2-4m^2, $s^2-n^2-2nf-f^2$, $s^2-n^2+2nf-f^2$; se infiere.

Lo 1.º que la reducida considerada como equacion de 3.er grado no tiene mas que una raiz real siempre que n y f son imaginarias, es decir, quando $x^4+px^2+qx+r=0$ tiene dos raices iguales y dos imaginarias: y como en este caso la reducida tiene solucion exâcta; la tendrá tambien la propuesta.

2.º Que si n, f son ambas reales ó imaginarias, ó si la equacion general tiene sus quatro raices rs. ó imaginarias; entonces la reducida considerada como de 3.er grado, está en el caso irreductible, y tiene sus tres raices reales: y si estas son positivas, las quatro de la propuesta serán reales: porque entonces $2m$, $m+f$, $n-f$ son cantidades reales. Si llamamos M la 1.ª, N la 2.ª y P la 3.ª; será $2n=N+P$ y $2f=N-P$; luego $2m+2n=M+N+P$, $2m-2n=M-N-P$, $-2m+2f=N-P-M$, $-2m-2f=P-N-M$: y pues estos son los quatro valores de x; serán reales.

Pero si la reducida solo tiene positiva una de estas raices; serán imaginarias todas las de la propuesta. En efecto, sea s^2-4m^2 la única raiz positiva de la reducida; tendremos $2m=M$ cantidad positiva, $n+f=N\sqrt{-1}$, y $n-f=P\sqrt{-1}$: de consiguiente $n=\frac{1}{2}P\sqrt{-1}+\frac{1}{2}N\sqrt{-1}$, y $f=\frac{1}{2}N\sqrt{-1}-\frac{1}{2}P\sqrt{-1}$,

cantidades que hacen parte de los quatro valores, que por lo mismo serán imaginarios. Lo mismo hubiera resultado en la suposicion de ser positiva qualquiera de las otras dos raices; y así se ve que la resolucion de las equaciones de 4.º grado está sujeta al mismo inconveniente del caso irreductible que las de 3.º

Si se nos pidiesen las raices de la equacion $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$; tendriamos $p = -3$, $q = -42$, $r = -40$: y seria la reducida $s^6 - 6s^4 + 169s^2 - 1764 = 0$, que se muda haciendo $s^2 = 2 + z$ (264), en $z^3 + 157z - 1442 = 0$. Esta tiene dos raices imaginarias, y la real $z = 7$: luego $s = \pm\sqrt{z + 2} = \pm 3$. Sustituyendo uno de estos valores en la fórmula general $x = \pm\frac{1}{2}s \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}p \pm \frac{q}{2s}\right)}$; resultan las quatro raices $x = -1$, $x = 4$, $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-31}$ de la equacion propuesta.

271 Quando las quatro raices de la equacion de 4.º grado son reales, se encuentran fácilmente, siempre que alguno de los valores de la reducida es un número entero, valiéndose del método esplicado (268) para hallar las raices irreductibles de una equacion de 3.er grado, quando alguna de ellas es un número entero.

Pidanse, por egemplo, las raices de la

equacion $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$. En este caso $p = -25$, $q = 60$, $r = -36$, y la reducida es $s^6 - 50s^4 + 769 s^2 - 3600 = 0$. Hagase $s^2 = \frac{z+50}{3}$ (264), y no $z + \frac{50}{3}$ para evitar quebrados; y se convertirá en $z^3 - 579z - 1150 = 0$, cuyas raices son (265), $z = 25$, $z = -2$, $z = -23$: de consiguiente $\pm\sqrt{\left(\frac{z+50}{3}\right)} = s = \pm 5, \pm 4, \pm 3$. Qualquiera de estos valores sustituido en la formula $x = \pm \frac{1}{2} s \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}p \pm \frac{q}{2s}\right)}$

da los quatro valores $x = 3$, $x = 2$, $x = 1$, $x = 6$ que se piden.

272. Como una equacion de 4.º grado es el producto de quatro factores de 1.º v. gr. $(x+a)$ $(x+b)$ $(x+c)$ $(x+d)$, y este producto es divisible por seis factores de 2.º grado, á saber, por $(x+a)$ $(x+b)$, $(x+a)$ $(x+c)$, $(x+a)$ $(x+d)$, $(x+b)$ $(x+c)$, $(x+b)$ $(x+d)$, $(x+c)$ $(x+d)$ que tienen todos un 2.º término, cuyo coeficiente es representado generalmente por s; es claro que s debe tener seis factores diferentes, y la equacion de s ascender á 6.º grado.

Asimismo faltando á la equacion propuesta el 2.º término, si uno de los valores de s es g, debe ser otro $-g$, y $s^2 - g^2$, será uno de

sus factores. Por igual razon, si h, $-h$, i, $-i$ son los otros quatro valores de s, deberán ser s^2-h^2, s^2-i^2 del número de sus factores; y de consiguiente, ademas de ser la equacion de 6º grado, deberán ser pares todas las potencias de s como lo son en efecto.

Resolucion de las Equaciones superiores al 4º grado

273 La teoría de las equaciones superiores al 3º y 4º grado sufre aun mayores dificultades, á pesar de los esfuerzos inútiles que han hecho los mayores talentos para encontrar métodos generales para resolverlas. Nosotros vamos á dar una idea de aquellos de que se han valido; y se verá por las muchas escepciones y dificultades á pue están espuestos, quánto dista de su perfeccion este ramo importante del Analísis.

274. 1.er *Método*. Este que se llama ***de los divisores***, se funda en la propiedad que tiene el último término de una equacion de ser el producto de todas sus raices (258): pues si dicho término se resuelve en todos sus divisores; deberán hallarse entre ellos las raices de la equacion, si las tiene conmensurables: y deberán ser aquellos que sustituidos en ella con + ó − en lugar de las incognita, la reduzca á cero.

Si se pidiesen por egemplo, las raices de la equacion $x^3 + 8x^2 + 17x - 10 = 0$; sacaré todos los divisores de 10 (32), que son 1, 2, 5, 10, y dividiendo la equacion por $x + 1$, $x - 1$, $x + 2$, $x - 2$ &c. tendré un cociente exâcto con los divisores $x - 1$, $x - 2$, $x - 5$ que serán las raices que busco. Pero es mas breve sustituir en la equacion ± 1, ± 2, ± 5, ± 10 en lugar de x; y 1, 2, 5 darán cero en prueba de que son sus raices.

275 Este método que se estiende á las equaciones de todos grados, quando sus raices no son inconmensurables; tiene el inconveniente de necesitar muchos tanteos quando en el último término hay muchos divisores. Para evitarle, supongamos que sea a uno de los divisores del último término que con x forma el factor $x + a$ de una equacion. Es evidente que si en ella se supone sucesivamente $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$; han de ser divisibles los resultados por $1 + a$, por a, y por $-1 + a$ á que se reduce el factor en virtud de estas suposiciones. Notese que $1 + a$, a, $-1 + a$ estan en progresion aritmética: y que el resultado de la suposicion $x = 0$ es el último término de la equacion, cuyo divisor es a. Luego para que éste forme con x el factor de la equacion, debe tener entre los divisores de los otros resultados números que estén con él en progresion aritmética, y si se encuentran muchos con es-

tas señas, se conocerá fácilmente los que se deben escluir haciendo $x=2$, y viendo quáles son las progresiones que no continúan por los divisores del resultado: obrando igualmente si es menester escluir mas.

Sirvanos de egemplo la equacion $x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0$; en la que suponiendo $x=1$, $x=0$, $x=-1$, me resultan 6, 10, 20: saco los divisores de estos números y colocados del modo siguiente . . . .

Suposic.	*Result.*	*Divisores.*	*Progresiones.*	
$x=1$	6	1, 2, 3, 6,	3	6
$x=0$	10	1, 2, 5, 10,	2	5
$x=-1$	20	1, 2, 4, 5, 10, 20,	1	4

tendré dos progresiones que me dan 2 y 5 por valores de a: pero como suponiendo $x=2$ que reduce la equacion á 14, solo hay entre sus divisores 1, 2, 7, 14, el 7 que continúe la segunda progresion; concluyo que el $x+5$ es unico factor de la equacion. Con efecto, dividiendo $x^3 + 3x^2 - 8x + 10$ por $x + 5$, resulta el cociente exâcto $x^2 - 2x + 2 = 0$; cuyas raices son $x = 1 \pm \sqrt{-1}$. Por el mismo método se hallará que las raices conmensurables de la equacion $x^3 - 3x^2 - 46x - 72 = 0$ son $x=9$, $x=-2$, $x=-4$.

276 Para encontrar los factores conmensurables de 2.º grado de una equacion; si $x^2 + bx + c = 0$ es uno de ellos, y suponemos

sucesivamente en dicha equacion ó cantidad dada $x=2$, $x=1$, $x=0$, $x=-1$, $x=-2$; los resultados á que la reducen, han de ser divisibles por $4+2b+c$, por $1+b+c$, por c, por $-1-b+c$, y por $4-2b+c$, en que se convierte el factor.

Habrá pues, entre los divisores del resultado $x=2$ alguno que represente $4+2b+c$, y si de cada uno de ellos tomados con + y- se resta 4, alguna de las restas representará $2b+c$.

Asimismo habrá entre los divisores del resultado $x=1$ alguno que represente $1+b+c$: y si se quita 1 de cada divisor con + y-, algun residuo deberá ser $b+c$. Entre los divisores del último termino á que se reduce la equacion en la suposicion de $x=0$, alguno equivaldrá á c: y entre los del resultado de $x=-1$ representados por $1-b+c$; debe encontrarse $-b+c$: quitando 1 á todos sus divisores tomados con + y-: así como se debe hallar $-2b+c$ entre los que resultan de $x=-2$, despues de quitar 4 á cada uno de sus divisores con + y-.

Las cantidades $2b+c$, $b+c$, c, $-b+c$, $-2b+c$ están en progresion aritmética: de consiguiente en la serie de los números que los representan, se deberán tomar los que estén en progresion aritmética: y el que en ellos corresponda á la suposicion $x=0$; será

el valor de c; como tambien será $b+c$ el de la suposicion $x=1$: luego si del 1.º se resta c, quedará el valor de b, y se habrá determinano el factor $x^2+bx+c=0$.

Apliquemos el método á un egemplo, advirtiendo que si resultan muchas progresiones, se verá quales se deben escluir por una nueva suposicion $x=3$, ó -3, restando de cada divisor del resultado tomado en + y −, 9 cuadrado de 3; y observando las progresiones que no se continuan con los números que resulten.

Sea $x^4-3x^2-12x+5=0$ la equacion, cuyos factores del 2.º grado se han de buscar; para lo qual procedo como se vé. . . . .

Supos.	*Res.*	*Divisores.*
$x=2$	15	1.3. 5.15.
$x=1$	9	1.3. 9.
$x=0$	5	1.5.
$x=-1$	15	1.3. 5.15.
$x=-2$	33	1.3.11.33.

Residuos.	*Progresiones.*			
−19,−9,−7.−5,−3,−1,1,11.	−3	1	−5	11
−10,−4,−2,0,2,8,	−4	0	−2	8
− 5,−1,1,5.	−5	−1	1	5
−16,−6,−4,−2,0,2,4,14.	−6	−2	4	2
−37,−15,−7,−5,−3,−1,7,19.	−7	−3	7	−1

La 1.ª columna contiene las suposiciones, la

2ª los resultados, la 3ª sus divisores: la 4ª los residuos, cuya primera línea se forma así: $-15-4=-19$, $-5-4=-9$, $-3-4=-7$, $-1-4=-5$: ahora se han tomado los divisores con $-$, tomados con $+$ dan $1-4=-3$, $3-4=-1$, $5-4=1$, $15-4=11$. Las últimas columnas contienen las progresiones.

Comparando ahora los residuos que corresponden á la suposicion $x=0$ con los superiores é inferiores, se verá que -5 es medio proporcional aritmético entre -4 y -3 que están en las líneas de encima y -6, -7 que están en las debajo: escribo pues esta progresion, que es la única que se encuentra, comparando -5 con los demas residuos. Paso despues á -1 que me da una progresion, cuya diferencia es 1, y otra con la diferencia 3: y finalmente con el -5 encuentro otra con la diferencia 3.

Y como las quatro progresiones no pueden ser todas útiles: pues los quatro números -5, -1, 1 y 5 no producen 5 (258); haré otra suposicion $x=3$, cuyo resultado 23 tiene por divisores á 1 y 23; de los que restando 9 cuadrado de 3, salen los residuos -32, -10, -8, y 14, entre los quales -8 y 14 continuan las dos últimas progresiones, y faltan -2 y 2 que debian continuar las otras dos. Tomaré pues, en la penúltima -1 que corresponde á $x=0$ para representar á

c, $5-2$ que corresponde á $x=1$, será $b+c$; luego b será -3: y el 1.er factor por el que se ha de dividir la equacion, será $x^2+3x+1=0$, y como resulta el cociente cabal $x^2-3x+5=0$; concluyo que estos dos son los factores de 2º grado de la equacion propuesta.

277 2º *Método.* Este se reduce á encontrar las equaciones inferiores que producen una equacion superior qualquiera, quando esto sea posible. Sea por exemplo, la equacion general $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + h = 0$ la que se trate de dividir sin resta por una equacion del grado n. Para lo qual supongo que la propuesta es el producto de las dos siguientes $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + T = 0$, y $x^{m-n} + px^{m-n-1} + qx^{m-n-2} + \&c... + t = 0$, cuyos coeficientes son todos indeterminados. Del producto de estas dos equaciones resultará otra del grado m, cuyos términos comparados con los de la propuesta, darán las equaciones suficientes para determinar las cantidades A, B, C &c. p, q, t &c. y por último reduciendo estas equaciones à una que contenga solo alguna de las indeterminadas A, B &c. p, q &c. faltará solamente buscar los divisores conmensurables de esta equacion (que los debe tener por ser números enteros todos sus coeficientes) para determinar el valor de dichos coeficientes, y hacer determinadas las equaciones que componen.

Propongamonos exâminar si la equacion $x^4-x^3+2x^2-x+15=0$, puede descomponerse en otras dos de 2º grado, que supondrémos sean $x^2+px+q=0$, $x^2+mx+n=0$. Su producto $x^4+(p+m)x^3+(q+mp+n)x^2+(mq+np)x+nq=0$ comparado con la equacion propuesta, da $p+m=1$; $q+mp+n=2$, $mq+np=-1$; $nq=15$: equaciones que vienen á parar en la siguiente $q^6-2q^5-16q^4+44q^3-240q^2-450q+3375=0$, cuyos divisores conmensurables son $q-3$ y $q-5$. Luego podremos suponer $q=3$ ó $q=5$; y de consiguiente será $n=5$ ó 3, $p=-2$ ó 3, $m=3$ ó -2: y los dos factores de la equacion propuesta serán $x^2-2x+3=0$, $x^2+3x+5=0$.

278 3.er *Método*. En este, que sirve para encontrar el valor próxîmo de las raices que no se ha podido sacar exâcto, se suponen conocidos dos números entre los que se encuentre la raiz, y despues se procede como vamos á ver en el egemplo siguiente en que se quiere averiguar uno de los valores proxîmos de x en la equacion $x^3-5x+6=0$.

Sustituyanse en ella o, 1, 2, 3 &c. en lugar de x: y como los resultados son todos positivos que van creciendo, se sustituirán o, -1, -2, -3, y se tendrá 6, 10, 8, -6 de resultados: de que colijo que una de las raices se halla entre -2 y -3, que han dado 8 y -6 de diferentes signos. Su-

mando ahora -2 y -3 y tomando la mitad, se se tendrá un medio aritmético entre los dos, que es $-2,5$ que puesto por x en la equacion, la reduce á $2,875$ cantidad positiva, que circunscribe la raiz á los números $-2,5$ y -3. Tomando entre ellos otro medio $-2,7$ y sustituyéndolo en la equacion, resulta la cantidad negativa $-0,183$: que manifiesta que la raiz está entre $-2,5$ y $-2,7$ que dan resultados de diferentes signos, y el valor de x estará muy cerca de $-2,6$ medio entre los dos.

Encontrado este número tan próxîmo á x: supongo que sea z la fraccion que le falta para igualarsele, de suerte que sea $x = -2,6 + z$: sustituyo esta cantidad en la equacion en lugar de x, y la reducirá, despreciando z^2 y z^3 que son valores muy pequeños, á $(-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 \times z - 5(-2,6) - 5z + 6 = 0$, esto es, á $15,28z + 1,424 = 0$; de donde se saca $z = -\frac{1,424}{15,28} = -0,09$: y $x = -2,6 + z = -2,6 - 0,09 = -2,69$ valor próxîmo que se busca.

Si se quiere aproxîmar mas, supongo $x = -2,69 + t$, y la sustitucion de esta cantidad en lugar de x, me dará $t = 0,000904$: de suerte que será $x = -2,689096$ que se puede acercar aun quanto se quiera. Si se divide ahora la equacion por este valor de x, resultará otra de grado inferior, cuyas rai-

ces próximas será facil encontrar.

279 Quando sustituyendo por x en la equacion los números comprehendidos entre cero y su último término, no varian de signo sus resultados, es señal de que contiene raices iguales ó imaginarias, ó parte reales y parte imaginarias en número par: pues teniendo las iguales esta forma $(x-a)^2(x-b)^2 = 0$, $(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2 = 0$; sus resultados siempre deben ser positivos: y las imaginarias que no pueden estar entre números reales, tampoco pueden producir cantidades de diferentes signos. Vease el modo de determinar las raices iguales.

280 Si se multiplica cada uno de los términos de una equacion de raices iguales por el esponente que tiene la incognita en aquel término, y se disminuye el exponente del producto de una unidad; se tendrá una nueva equacion, cuyo comun divisor con la primera contendrá las raices iguales que se buscan, bien que disminuidas de una unidad. La demostracion de esta regla quando todas las raices son iguales, se ve en la equacion general $x^m + max^{m-1} + \left(\frac{m \times m-1}{2}\right)a^2x^{m-2} + \&c + a^m = 0$, en la qual multiplicando cada término por el esponente de x (contando con que en el último el esponente de x es cero), resulta $mx^m + (m \times m-1)ax^{m-1} + \left(\frac{m \times m-1 \times m-2}{2}\right. a^2x^{m-2}$

$+$ &c... $=0$, que dividida por mx, da $x^{m-1}+$
$(m-1)ax^{m-2}+\frac{m-1 \times m-2}{2}a^2x^{m-3}+$ &c. $=0$,

la qual equivale al binomio $(x+a)^{m-1}=0$, y cuyo comun divisor con la propuesta $(x+a)^m=0$, es $(x+a)^{m-1}$: luego la regla es evidente quando todas las raices son iguales.

Si solo lo son dos á dos como en la equacion $(x+a)^m(x+b)^n=0$, se multiplicarán uno por otro los dos binomios, y multiplicando cada término de la equacion que resulta, por el esponente respectivo de x, producirán $m(x+a)^{m-1}(x+b)^n+n(x+b)^{n-1}\times(x+a)^m=0$, cuyo comun divisor con la propuesta es $(x+a)^{m-1}(x+b)^{n-1}=0$.

Busquemos ya las raices iguales de la equacion $x^4-4x^3-2x^2+12x+9=0$. Multiplicando cada término por el esponente de x, resulta $4x^4-12x^3-4x^2+12x=0$, y dividiendo por $4x$, sale $x^3-3x^2-x+3=0$. El comun divisor de esta equacion y de la propuesta es (104) x^2-2x-3 producto de $x-3$ por $x+1$: luego las raices iguales de la equacion $x^4-4x^3-2x^2+12x+9=0$ son $(x-3)^2$ y $(x+1)^2$.

Las de la equacion $x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4=0$ se encuentran multiplicando por los esponentes respectivos, y dividiendo despues por $6x$, que da $x^5-4x^3-2x^2+3x+2=0$, cuyo comun divisor con la pro-

puesta es $x^4+x^3-3x^2-5x-2$, ó $(x+1)^3(x-2)$; serán pues las raices iguales que se buscan, $(x+1)^4$ y $(x+2)^2$.

281 En quanto á las raices imaginarias, se ha demostrado por D'Alembert en las Memorias de la Academia de Berlin año de 1746, que todas pueden reducirse á esta forma $x=a+b\sqrt{-1}$, siendo a y b cantidades positivas ó negativas: como tambien que si $a+b\sqrt{-1}$ es una de las raices, será la otra $a-b\sqrt{-1}$; y de consiguiente que solo las equaciones de grado par pueden tener todas sus raices imaginarias. Luego estas se podrán descomponer en factores de 2º grado de esta forma $(x-a-b\sqrt{-1})$, $(x-a+b\sqrt{-1})$, cuyo producto es $x^2-2ax+a^2+b^2$: y quando la equacion tenga todas sus raices imaginarias, se procurará descomponer en factores de 2º grado, por cuyo medio se tendrán las raices de la equacion.

FIN DEL TOMO I.

INDICE DE LO CONTENIDO EN ESTE Tomo primero.

Erratas esenciales del primer Tomo, que se deben corregir ántes de leerle.

Pag.	*Linea.*	*Dice.*	*Ha de decir.*
ix. . . .	6. . .	de los	y los
xxiii. . .	7. . .	Friore	Fiore
xxxvii. .	28. . .	Edoxio	Eudoxîo
7. . . .	25. . .	$x 1 1 = 3 1$	$+1 = 3 1$
8. . . .	6. . .	5909	5923
12. . . .	4. . .	a 6	á 9
id. . . .	8. . .	5 unidades	6 unidades
13. . . .	13. . .	las 2	las 3
18. . . .	25. . .	7 veces	6 veces
19. . . .	20. . .	dismimuir	aumentar
20. . . .	2. . .	639475	9639475
22. . . .	7. . .	15	16
28. . . .	10. . . .	740	74, quatro mil
29. . . .	27. . . .	$28\frac{5}{11}$	$28\frac{6}{11}$
32. . . .	17. . .	$\frac{4\times 19}{7\times 10}$	$\frac{4\times 10}{7\times 10} = \frac{40}{70}$
35. . . .	2. . .	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\times\frac{16}{3}$
37. . . .	1. . .	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$
39. . . .	14. . .	(39)	(49)
45. . . .	*penult.*	2728	1728
id. . . .	*ult.* . . .	13^2	43^2
46. . . .	4. . .	360	3600
48. . . .	24. . .	20616283	20626283
49. . . .	9. . .	$\frac{1}{9}$. . . . $26\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$ $20\frac{1}{6}$
50. . . .	3. . .	12244	12444

Pag.	Linea.	Dice.	Ha de decir.
51...	7...	$26\frac{13}{63}$...$26\frac{13}{63}$	$26\frac{13}{68}$
57....	26...	3^{a}	$3b$
59.....	4...	$6b^{9}c^{4}$	$6b^{2}c^{4}$
id.	7...	$10b^{2}c^{2}d$	$10b^{3}c^{2}d$
66....	11....	(42)	(38)
70......	penult.	$-3ab^{2}$	$-3ab$
73....	2....	$\frac{887}{14158}$	$\frac{887}{14159}$
id....	13...	$3+\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$
id.....	15...	$\frac{1}{3}+\frac{15}{1010}$	$\frac{1}{3}+\frac{15}{106}$
75....	1....	a	a^{2}
id.	20...	a^{m}	b^{m}
77....	1....	$\frac{2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{6}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}$	$\frac{2a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{6}{3}}}{c^{\frac{3}{3}}}$
90....	15...	$a^{2}+2ab^{2}+b$	$a^{2}+2ab+b^{2}$
98....	16...	$\frac{3,715}{2}=1,857$	$\frac{3,708}{2}=1,854$
102...	15....	114)	(115)
107....	11...	$\sqrt[2]{\frac{x^{2}c}{m}}$	$\sqrt[4]{\frac{x^{2}c}{m}}$
id.....	12...	$\frac{b^{8}c^{8}}{256}$	$\sqrt[24]{\frac{b^{8}c^{8}}{256}}$
110...	16...	b^{2r}	b^{2n}
112...	2...	$\frac{m-2Cb}{1\times2\times3\times a}$	$\frac{(m-2)Cb}{1\times2\times3\times a}$

Pag.	Linea.	Dice.	Ha de decir.
122...	penult.	*a:ab*	*a:b*
129...	ult. . .	estremo	termino
131...	2 ...	$583\frac{2}{3}$	$583\frac{1}{3}$
133...	5 ...	20 *mrs.*	$20\frac{3}{5}$ *mrs.*
id	20...	44 *rs.* y 20 *mrs.*	44 *pe.* y 9 *rs.*
143...	22...	$\frac{37}{003}$	$\frac{37}{300}$
145...	14...	$\frac{bd-ad\times bc-bd}{c-d}$	$\frac{bd-ad+bc-bd}{c-d}$
155 ...	16...	$\overline{\times(n+b+c)}$	$\overline{\times(a+b+c)}$
156...	15...	25^5	25^{25}
162...	21...	0,816544	0,819544
167...	23...	32	132
168 ...	10....	7,473650	7,423659
id.	11...	20,506789	20,509789
183....	23 y ult.	(193).(194).	(194).(195)
188...	11...	$x=3$	$z=3$
195...	19...	*la* 2.ª	la 1.ª
201...	ult...	$+\frac{cz}{a}$	$-\frac{cz}{a}$
202...	4...	$-\frac{cz}{4a}$	$+\frac{cz}{4a}$
id.	6...	$\overline{\overline{+}}$	$\overline{\overline{\quad+\quad}}$
227...	6...	$(r-$	$(-r-$
228...	3...	$23t^4$	$22t^4$
229....	3...	$\frac{1}{17}p^3$	$\frac{1}{27}p^3$
230...	8....	id.	id.
232...	8...	$\sqrt{-(\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{3}p}$.	$\sqrt{(-\frac{1}{4}s^4-\frac{1}{3}p}$
235...	5..	en z^2	en z^4

※